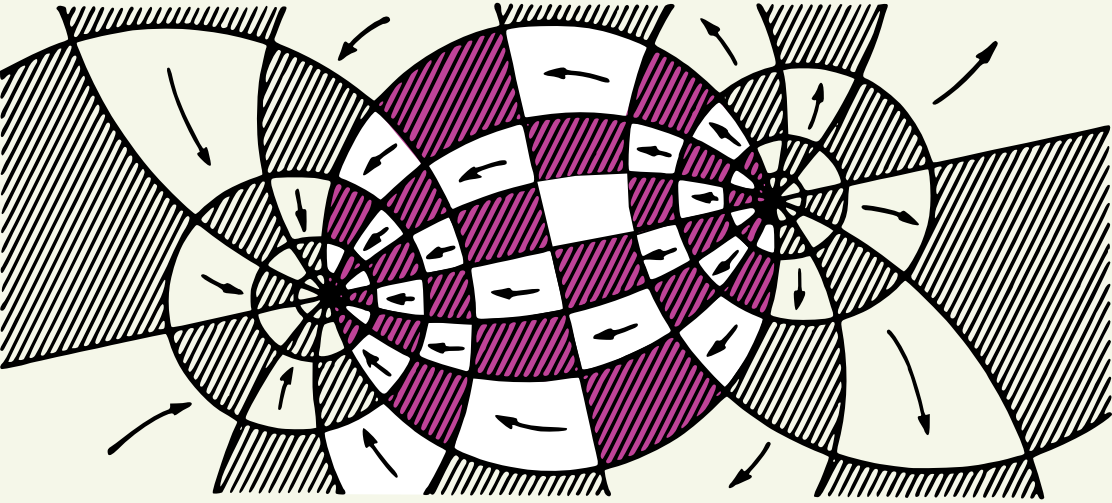
M. Postnikov

Leçons de Géométrie

Ier semestre

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE



Éditions Mir Moscou

М. М. ПОСТНИКОВ

ЛЕКЦИИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Семестр I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

MIKHAÏL POSTNIKOV

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE

Ier semestre

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe par
Irina Pétrova

На французском языке

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» 1979

© Traduction française Editions Mir 1981

TABLE DES MATIÈRES

Préface à l'édition russe 10

Préface à l'édition française 12

LEÇON PREMIÈRE 15

Objet de la géométrie analytique.— Vecteurs.— Addition des vecteurs.— Multiplication d'un vecteur par un nombre.— Espaces vectoriels.— Exemples.— Espaces vectoriels sur un corps quelconque.

LEÇON 2 22

Conséquences simples des axiomes des espaces vectoriels.— Associativité de l'addition des vecteurs.— Notion de famille.

LEÇON 3 26

Dépendance linéaire. Indépendance linéaire.— Ensembles libres.— Propriétés élémentaires.— Théorème de dépendance linéaire.

LEÇON 4 31

Vecteurs colinéaires.— Vecteurs coplanaires.— Interprétation géométrique de la colinéarité et de la coplanarité.— Familles génératrices de vecteurs. Bases. Dimension.— Axiome de la dimension.— Critère de base.— Coordonnées d'un vecteur.— Coordonnées de la somme de vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre.

LEÇON 5 37

Isomorphismes d'espaces vectoriels.— Isomorphismes de coordonnées.— Isomorphie de deux espaces vectoriels de même dimension.— Méthode des coordonnées.— Espaces affines.— Isomorphie de deux espaces affines de même dimension.— Coordonnées affines.— Droites dans l'espace affine.— Segments.

LEÇON 6 46

Equations paramétriques d'une droite.— Equation d'une droite dans le plan.— Equation canonique d'une droite dans le plan.— Equation générale d'une droite dans le plan.— Droites parallèles.— Position relative de deux droites dans le plan.— Théorème d'unicité.— Position d'une droite par rapport aux axes de coordonnées.— Partage du plan par une droite.

LEÇON 7 53

Définition intuitive d'un bivecteur.— Définition formelle d'un bivecteur.— Coïncidence des deux définitions.— Bivecteur nul.— Condition d'égalité de deux bivecteurs. — Condition de parallélisme d'un vecteur et d'un bivecteur.— Condition de $n = 3$.— Addition des bivecteurs.

LEÇON 8 60

La définition de la somme de deux bivecteurs est correcte.— Produit d'un bivecteur par un nombre.— Propriétés algébriques de la multiplication extérieure.— Espace vectoriel de bivecteurs.— Bivecteurs dans le plan et théorie des aires.— Bivecteurs dans l'espace.

LEÇON 9 69

Plans dans l'espace.— Equations paramétriques du plan.— Equation générale du plan.— Plan passant par trois points non alignés.

LEÇON 10 73

Partage de l'espace par un plan.— Position relative de deux plans dans l'espace.— Droites dans l'espace.— Plan contenant une droite donnée et passant par un point donné.— Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace.— Position relative de deux droites dans l'espace.— Passage d'une base d'un espace vectoriel à une autre.

LEÇON 11 83

Formules de transformation des coordonnées des vecteurs.— Formules de transformation des coordonnées affines des points.— Orientations.— Orientation induite de la droite.— Droite à orientation définie par une équation.— Orientation du plan dans l'espace.

LEÇON 12 93

Déformations des bases.— Propriété « être de même sens » des bases qui se déduisent l'une de l'autre par une déformation.— Bases et matrices équivalentes.— Equivalence de la propriété « être déformable » et de la propriété « être de même sens ».— Equivalence des systèmes de vecteurs linéairement indépendants.— Trivecteurs.— Produit d'un trivecteur par un nombre.— Produit extérieur de trois vecteurs.

LEÇON 13 102

Trivecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3.— Addition des trivecteurs.— Formule du volume d'un parallélépipède.— Produit scalaire.— Axiomes de la multiplication scalaire.— Espaces euclidiens.— Longueur d'un vecteur et angle de deux vecteurs.— Inégalité de Cauchy-Bouniakovski.— Inégalité du triangle.— Théorème des diagonales d'un parallélogramme.— Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore.

LEÇON 14 110

Forme métrique et coefficients métriques.— Condition de définie positivité.— Formules de transformation des coefficients métriques dans un changement de base.— Familles orthonormées de vecteurs

et coefficients de Fourier.— Bases orthonormées et coordonnées rectangulaires.— Décomposition des matrices définies positives.— Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.— Isomorphisme d'espaces euclidiens.— Matrices orthogonales.— Matrices orthogonales d'ordre 2.— Formules de transformation des coordonnées rectangulaires.

LEÇON 15 123

Trivecteurs dans l'espace euclidien orienté.— Produit mixte de trois vecteurs.— Aire d'un bivecteur dans l'espace euclidien.— Vecteur complétant un bivecteur dans l'espace euclidien orienté.— Produit vectoriel.— Isomorphisme d'espaces vectoriels de vecteurs et de bivecteurs.— Produit vectoriel en coordonnées.— Equation normale de la droite dans le plan euclidien. Distance d'un point à une droite.— Angles de deux droites dans le plan euclidien.

LEÇON 16 133

Plan dans l'espace euclidien.— Distance d'un point à un plan.— Angle de deux plans. Angle d'une droite et d'un plan. Angle de deux droites.— Distance d'un point à une droite dans l'espace.— Distance de deux droites dans l'espace.— Equation de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires dans l'espace.

LEÇON 17 138

Parabole.— Ellipse.— Propriété focale de l'ellipse. Ellipse définie par foyer et directrice.— Hyperbole.— Propriété focale de l'hyperbole. Hyperbole définie par foyer et directrice.

LEÇON 18 146

Equations des ellipses, des paraboles et des hyperboles rapportées au sommet.— Coordonnées polaires.— Equations des ellipses, des paraboles et des hyperboles en coordonnées polaires.— Ellipses, paraboles et hyperboles affines.— Courbes algébriques.— Courbes du second degré et difficultés associées.— Géométrie affine complexe et sa déficience.

LEÇON 19 155

Espaces vectoriels réels-complexes.— Dimension des ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espaces vectoriels.— Isomorphisme de ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espaces vectoriels.— Complexification.—Espaces affines réels-complexes.— Complexification.— Espaces euclidiens réels-complexes.— Courbes du second degré sur $\mathbb{R}$, réelles et imaginaires.

LEÇON 20 160

Préliminaires.— Centre d'une courbe du second degré.— Centres de symétrie.— Courbes à centre.— Droites de direction non asymptotique.— Tangentes.— Droites de direction asymptotique.

LEÇON 21 168

Directions singulières et non singulières.— Diamètres.— Diamètres et centres.— Directions conjuguées et diamètres conjugués.— Simplification de l'équation d'une conique à centre.— Plusieurs précisions nécessaires. — Simplification de l'équation d'une conique qui n'est pas une courbe à centre.

LEÇON 22 177

Courbes du second degré dans le plan affine complexe.— Courbes du second degré dans le plan affine réel-complexe.— Unicité de l'équation d'une courbe du second degré.— Courbes du second degré dans le plan euclidien.— Circonférences.

LEÇON 23 187

Ellipsoïdes.— Ellipsoïdes imaginaires.— Cônes imaginaires du second degré.— Hyperboloïdes à deux nappes.— Hyperboloïdes à une nappe.— Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.— Cônes du second degré.— Paraboloïdes elliptiques.— Paraboloïdes hyperboliques.— Cylindres elliptiques.— Autres quadriques.— Théorème de classification.

LEÇON 24 208

Coordonnées de la droite.— Faisceaux de droites.— Faisceaux propres et faisceaux impropres.— Plans complétés.— Modèles de la géométrie du complété projectif du plan affine.

LEÇON 25 216

Coordonnées affines homogènes.— Equations des droites en coordonnées homogènes.— Courbes du second degré dans le complété projectif du plan affine.— Circonférences dans le plan euclidien complété réel-complexe.— Plans projectifs.— Coordonnées affines homogènes dans la gerbe de droites.— Formules de transformation des coordonnées affines homogènes.— Coordonnées projectives.— Courbes du second degré dans le plan projectif.

LEÇON 26 224

Isomorphismes de coordonnées d'espaces vectoriels.— Isomorphismes de coordonnées d'espaces affines.— Complété projectif de l'espace affine.— Espace projectif.— Faisceaux de plans.— Gerbes de plans.— Adjonction d'éléments impropres.— Transformations orthogonales, affines et projectives.

LEÇON 27 235

Transformations affines en coordonnées.— Exemples de transformations affines.— Décomposition des transformations affines.— Transformations orthogonales.— Déplacements du plan.— Symétries et symétries avec glissement.— Décomposition d'un déplacement du plan en le produit de deux symétries.— Rotations de l'espace.

LEÇON 28 246

Théorème de Desargues.— Théorème de Pappus-Pascal.— Théorème de Fano.— Principe de dualité.— Modèles du plan projectif.— Modèles de la droite projective et de l'espace projectif.— Droite projective complexe.

LEÇON 29 257

Transformations homographiques.— Transformations linéaires.— Inversion.— Inversion et homographies.— Deux propriétés des transformations homographiques.— Points fixes des transformations

homographiques.— Homographies paraboliques, elliptiques, hyperboliques et loxodromiques.— Théorème de trois points.— Multiplicateur d'une transformation homographique non parabolique.— Classification des homographies.— Formules de la projection stéréographique.— Rotations de la sphère en tant que transformations homographiques du plan.— Déplacements ramenant un cube sur lui-même.

Index 277

PRÉFACE À L'ÉDITION RUSSE

Ce livre reproduit presque mot à mot les conférences faites à la Faculté mécano-mathématique de l'Université de Moscou à l'intention des étudiants de première année dans le cadre d'un cours biennal de Géométrie. En les préparant, l'auteur a tenu compte, en plus de ses vues à lui, du programme d'études, des traditions de la chaire de géométrie supérieure et de topologie et de la nécessité de préparer le terrain pour le second semestre. Quant à l'ordre dans lequel les matières sont enseignées, il est également fonction des cours d'Algèbre et d'Analyse, des desiderata des assistants chargés des séminaires et d'autres considérations d'ordre secondaire qui peuvent s'avérer décisives dans la pratique. (Lorsque l'auteur choisissait les sujets de plusieurs dernières leçons, il pensait surtout à l'impossibilité de les consolider par des exercices. Quant à la leçon 28, il la préparait sans être sûr d'avoir le temps de la lire à ses élèves car les jours fériés produisent un décalage dans l'horaire.)

Le livre présente deux particularités qui méritent, à notre avis, une mention spéciale. La première est qu'on s'appuie dès le début sur les axiomes pour ne recourir aux images géométriques que dans des buts propédeutiques. Il n'est guère nécessaire d'expliquer pourquoi, de tous les systèmes d'axiomes, on a choisi l'axiomatique remontant à Weyl qui repose sur la correspondance entre les couples de points et les vecteurs. On introduit donc plus tôt que d'habitude la notion d'espace vectoriel. L'expérience montre que ce sujet ne présente en général pas de difficulté pour les étudiants.

La seconde particularité, qui éveille d'ailleurs des critiques, consiste à développer et à utiliser de façon systématique les notions de bivecteur et de trivecteur, ce qui permet de séparer nettement la partie affine de la théorie d'avec sa partie métrique et d'entrevoir la théorie générale des multivecteurs qui sera enseignée au second semestre.

Chaque Leçon reproduit une conférence orale de deux heures, et il arrive donc qu'on change de sujet au milieu du chapitre. La

Leçon 28 réunit par contre deux variantes de la conférence terminale. On conçoit que les conférences de même durée ne le sont plus lorsqu'on les met par écrit. Le programme d'études officiel prévoit 36 leçons, mais dans la pratique, le cours de Géométrie analytique se termine sur la 28ième leçon.

27 octobre 1977

Mikhaïl Postnikov

PRÉFACE À L'ÉDITION FRANÇAISE

Après avoir lu mon livre, certains professeurs de mes amis m'ont reproché la longueur de plusieurs leçons qu'il serait physiquement impossible de présenter en deux heures de cours. J'ai fait valoir les droits de l'amitié pour leur rappeler que même s'il n'est pas novice dans le métier, un professeur doit préparer ses conférences et les minuter. Il faut trouver le rythme de chaque leçon (indiquer les passages à lire lentement ou à dicter et ceux où l'on accélère le débit) et en établir la tonalité (i.e. les instants où l'on élève ou baisse la voix). Un bon mot au milieu d'une leçon est une chose excellente pour ranimer un auditoire fatigué. Ce bon mot, on le polit et repolit chez soi, dans ses moindres détails, jusqu'au jeu de physionomie. Il va de soi que tout ce qui concerne les formules et les textes écrits au tableau : leur enchaînement, leur place, l'instant où on les efface, doit être prévu d'avance et bien s'incorporer dans la leçon. On verra le temps que cela permet de gagner et la quantité de choses qu'on peut dire ainsi de façon mesurée et circonstanciée, ce qui n'exclut pas les répétitions et les éclaircissements.

Certains critiques ont désapprouvé mon attachement aux bivecteurs et aux trivecteurs, dont on pourrait, disent-ils, se passer. A ce propos je voudrais citer les paroles d'un grand physicien (Max Planck sans doute) qui a dit que la condition *sine qua non* du triomphe des idées inédites (Planck avait en vue les sciences, mais de là aux méthodes d'enseignement il n'y a pas loin) est la disparition de la génération dont leurs adversaires font partie. Témoin l introduction, il y a un demi-siècle, des vecteurs dans le cours de Géométrie analytique. Peu de gens se rappellent les débats acharnés à ce sujet. Les jeunes ne soupçonnent seulement pas que de papier a été noirci et que de coups ont été échangés pour démontrer la « nocivité » des vecteurs. Avec les vecteurs, disait-on, on remplace trois équations en coordonnées par une seule équation vectorielle, mais on perd en compréhension ce qu'on gagne en papier. C'est vers les années 1930 que l'on commença à interpréter la géométrie en termes de vecteurs, et deux décennies furent nécessaires pour qu'on renonce, ce faisant,

à des si et des mais timides (la situation a changé un peu plus vite en physique et en mécanique). C'est maintenant au tour des bivecteurs et des trivecteurs de faire leur purgatoire.

La traduction de mon livre par les Editions de Moscou est l'occasion d'y apporter plusieurs améliorations dont la plus sérieuse consiste, à mon avis, à simplifier la complexification de l'espace affine (leçon 19). La construction du complexifié comporte un certain arbitraire (ce qui m'en détourna naguère) qui s'avère d'ailleurs sans importance. La traduction comprend une leçon de plus que l'original où l'éditeur avait, pour des raisons purement techniques, réuni dans la leçon 28 deux variantes de la conférence terminale.

Mikhaïl Postnikov

LEÇON PREMIÈRE

Objet de la géométrie analytique.— Vecteurs.— Addition des vecteurs.— Multiplication d'un vecteur par un nombre.— Espaces vectoriels.— Exemples.— Espaces vectoriels sur un corps quelconque.

La géométrie analytique, qui fait l'objet de ces leçons, n'est pas une branche déterminée des mathématiques. C'est plutôt une discipline (un cours) à contenu variable centré essentiellement sur la notion de coordonnées. La tradition veut que ce cours contienne la théorie des courbes de degré 1 et 2 (des droites et des sections coniques) dans le plan et la théorie plus succincte des surfaces de degré 1 et 2 dans l'espace. Quant aux autres éléments du cours, ils varient, et même notablement, d'un auteur à l'autre.

Avant d'aborder la géométrie analytique proprement dite, i.e. les coordonnées, nous voulons en construire une base axiomatique solide. En axiomatisant la géométrie élémentaire, on suit en fait Euclide et on prend pour notions de départ les points, les droites et les plans. Il est connu qu'on aboutit dans cette voie à un système compliqué d'une vingtaine d'axiomes qui, ce qui plus est, ne trouve d'applications (ni globalement ni en partie) dans aucune discipline mathématique.

Le concept de *vecteur* permet une axiomatique plus commode et plus simple: plus simple, car les axiomes « vectoriels » utilisent la théorie des nombres réels dont les axiomatiques « euclidiennes » reproduisent nécessairement une grande partie; plus commode, car ses divers éléments jouent un rôle de premier plan dans les mathématiques modernes et on devra tôt ou tard en prendre connaissance. On fait donc d'une pierre plusieurs coups.

* * *

On se représente intuitivement un vecteur comme un segment de droite orienté dont on distingue l'origine et l'extrémité. Son sens est le sens de parcours allant de l'origine vers l'extrémité. On désigne par $\overrightarrow{AB}$ * un vecteur d'origine A et d'extrémité B. Le symbole graphique d'un vecteur est une flèche.

* Partout dans le texte, les notations et les abréviations sont celles de l'auteur. (*N.d.T.*)

En physique, les forces, les vitesses et les accélérations sont des grandeurs vectorielles (ou des vecteurs).

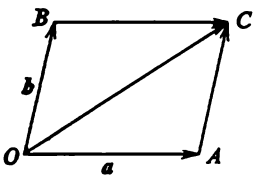
Deux vecteurs sont dits *égaux* si leurs longueurs sont égales et

Vecteur $\overrightarrow{AB}$ Vecteurs égaux

s'ils ont même direction (i.e. ils ont pour supports des droites parallèles) et même sens. Soulignons que nous supposons partout dans ce livre que *deux droites confondues sont parallèles.*

* * *

Il est connu en mécanique que deux forces agissant sur un point matériel équivalent à une troisième force définie par la règle du



Addition de deux vecteurs

parallélogramme bien connue. On appelle donc *somme* de deux vecteurs $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, et on note $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, le vecteur $\overrightarrow{OC}$ diagonale du parallélogramme construit sur **a** et **b**.

Comme $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, la somme est définie par la formule simple

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

(On dit des fois que cette formule traduit la « règle du triangle ».)

L'addition des vecteurs est associative, i.e.

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} \tag{1}$$

pour **a**, **b** et **c** quelconques. En effet, si $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$, on a

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

et

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

Aussi on omet les parenthèses dans la somme de plusieurs vecteurs: le symbole $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ a une valeur unique.

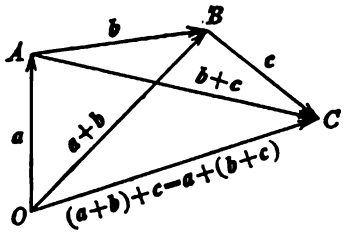
L'opération d'addition des vecteurs est commutative, i.e.

(2) $$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

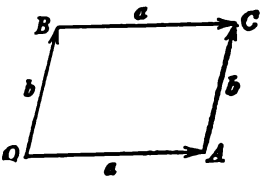
pour tout **a** et tout **b**. En effet, si $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ et $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{OC}$, alors $\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}$, donc

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $A=B$ est appelé *vecteur nul*. Il ne dépend



Associativité de l'addition de deux vecteurs



Commutativité de l'addition de deux vecteurs

pas de l'origine et se note **0**. La longueur du vecteur nul est par définition $=0$. Le vecteur nul n'a pas de sens (on peut également dire qu'il a tout sens qu'on veut).

La formule

$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$$

montre que le vecteur **0** est élément neutre pour l'addition, i.e. qu'on a pour tout **a**

(3) $$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

Etant donné un vecteur $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, on obtient un vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté $-\mathbf{a}$, en inversant le sens de parcours du support.

La formule

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$$

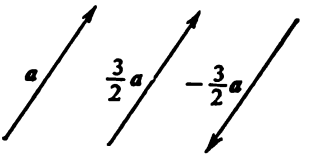
montre que $-\mathbf{a}$ *est l'opposé de* **a** *pour l'addition*, i.e.

(4) $$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0$$

quel que soit le vecteur **a**.

* * *

On appelle *produit* d'un vecteur **a** par un nombre (réel) k, et on note $k\mathbf{a}$, un vecteur dont la longueur est égale à celle multipliée par $|k|$ de **a**, qui a même direction que **a** et même sens ou le sens



Multiplication d'un vecteur par un nombre

contraire selon que $k > 0$ ou $k < 0$. Cette définition n'exclut pas les cas $\mathbf{a} = 0$ ou $k = 0$. Les deux fois, on a $k\mathbf{a} = 0$.

Il y a une certaine compatibilité entre la définition du produit d'un vecteur par un nombre et celle de la somme des vecteurs, à savoir

$$n\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a}}_{n \text{ fois}}$$

pour tout entier naturel n. Il est clair que

$$(-1)\,\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

On vérifie sans peine les égalités

$$(k + l)\,\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a} \tag{5}$$

et

$$(kl)\,\mathbf{a} = k\,(l\mathbf{a}) \tag{6}$$

pour k, l quelconques et tout vecteur **a** (la démonstration se ramène à énumérer toutes les combinaisons possibles des signes affectant k et l pour chacune desquelles l'affirmation est évidente).

Le fait que dans toute homothétie (et toute symétrie centrale) un parallélogramme change en un parallélogramme, entraîne de suite

$$k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b} \tag{7}$$

pour tout nombre k et **a** et **b** arbitraires.

Enfin, on a l'égalité évidente

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \tag{8}$$

avec **a** quelconque.

Après avoir établi ces faits susceptibles d'une interprétation géométrique sensible, on les considère comme axiomes. Dans ces

axiomes (propositions 1° à 8° ci-dessous), le symbole $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels (on en montrera la raison plus loin).

Définition 1. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble dont les éléments seront appelés *vecteurs* (bien qu'ils puissent être de nature quelconque). On suppose qu'on fait correspondre d'une certaine manière à tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ et à tout $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ un troisième vecteur noté $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ qui en est la *somme*. On suppose de plus qu'on fait correspondre d'une certaine manière à tout nombre $k \in \mathbb{K}$ et à tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ un vecteur $k\mathbf{a}$ qui est le *produit* de $\mathbf{a}$ par k. Si ces opérations présentent les propriétés (1) à (8) ci-dessus, i.e. si

1° $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ pour $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ arbitraires de $\mathcal{V}$;

2° $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ quels que soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$;

3° il existe un vecteur $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ tel que $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$;

4° pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ on trouve un $-\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ tel que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;

5° $(k + l)\,\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ pour tout k et tout l de $\mathbb{K}$ et $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ quelconque;

6° $(kl)\,\mathbf{a} = k\,(l\mathbf{a})$, avec k, l quelconques de $\mathbb{K}$ et tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$;

7° $k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ pour tout nombre $k \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ arbitraires;

8° $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$,

l'ensemble $\mathcal{V}$ constitue un *espace vectoriel.*

Quand $k = \frac{1}{\lambda}$, le vecteur $k\mathbf{a}$ se note $\frac{\mathbf{a}}{\lambda}$.

On souligne que la définition 1 n'impose pas de restriction à la nature des éléments de l'ensemble $\mathcal{V}$ ni à la réalisation des opérations $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (addition) et $(k, \mathbf{a}) \mapsto k\mathbf{a}$ (multiplication par un nombre), si bien qu'il y a quantité d'espaces vectoriels.

* * *

Exemples.

1) Même quand on ne dispose que des vecteurs ayant une interprétation géométrique sensible (segments orientés) que nous avons examinés au début de la leçon, on construit plusieurs espaces vectoriels $\mathcal{V}$ distincts selon qu'on prend tous les vecteurs de l'espace, les seuls vecteurs du plan ou les vecteurs sur la droite.

2) L'espace vectoriel le plus simple est l'espace réduit au vecteur nul. (On le note $\{0\}$, mais nous le désignerons, pour simplifier les notations, par le même symbole 0 que le vecteur nul, son élément unique. Il suffit d'être quelque peu attentif pour que cela n'entraîne aucune ambiguïté.)

3) Soient X un ensemble quelconque et $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions (à valeurs réelles) définies sur X. On définit de façon usuelle (« par les valeurs ») la somme $f + g$ de deux fonctions f, g et le produit kf d'une fonction f par un nombre k, i.e. on a les

formules

$$(9)\qquad \begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \qquad x \in X, \\ (kf)(x) &= k(f(x)), \qquad x \in X, \end{aligned}$$

et on vérifie sans peine que tous les axiomes 1° à 8° sont justes. Cela signifie que l'ensemble $\mathscr{F}(X)$ est un espace vectoriel pour les opérations (9).

Ainsi, les « vecteurs » de cet exemple sont des fonctions.

4) Lorsque $X = \mathbb{R}$ (ou sous l'hypothèse plus générale de X une partie arbitraire de la droite numérique $\mathbb{R}$), on peut parler de l ensemble $\mathscr{C}(X)$ de toutes les fonctions continues définies sur X. On démontre en analyse que la somme $f+g$ de deux fonctions continues et le produit kf d'une fonction continue par un nombre sont des fonctions continues. Aussi l'ensemble $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues constitue un espace vectoriel (pour les opérations (9)). On se passe de vérifier les axiomes 1° à 8° parce que $\mathscr{C}(X) \subset \mathscr{F}(X)$.

On cite comme exemples d'espaces vectoriels l'ensemble des fonctions admettant des dérivées (jusqu'à un ordre donné), l'ensemble des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz et de nombreuses autres classes de fonctions qu'on étudie en analyse mathématique.

On comprend désormais pourquoi la notion d'espace vectoriel a, en théorie moderne des fonctions, un rôle si important, plus important peut-être qu'en géométrie. Il va de soi que les espaces vectoriels de fonctions ne sont pas de notre ressort. Ils font l'objet de l'analyse fonctionnelle dont les fondements sont inclus, à l'Université de Moscou, dans le cours « Analyse III ».

5) L'ensemble des polynômes (à une indéterminée) forment un espace vectoriel.

Il en est également de l'ensemble des polynômes dont le degré est égal au plus à un nombre n donné. (Ainsi, il y a autant d'espaces vectoriels que de n donnés.)

Les espaces vectoriels constituent donc un élément de premier ordre de l'algèbre.

6) Soit n un entier naturel quelconque. Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^n$ de toutes les suites à n nombres réels $(a_1, \ldots, a_n)$. On définit les opérations vectorielles au moyen des composantes:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$k(a_1, \ldots, a_n) = (ka_1, \ldots, ka_n),$$

et on structure ainsi $\mathbb{R}^n$ en espace vectoriel.

Nous prions le lecteur de ne pas oublier l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ qui devra jouer un rôle important dans l'exposé.

Remarque 1 (à lire quand on se familiarisera avec les notions de corps et d'anneau introduites par le cours d'Algèbre). La définition 1 n'utilise pas la propriété pour $\mathbb{K}$ d'être l'ensemble (le corps) des

nombres réels. Le fait d'assimiler $\mathbb{K}$ à un corps quelconque (de caractéristique finie même) ne change rien dans la formulation. On définit donc un espace vectoriel *sur* un corps $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nous retrouvons les espaces vectoriels cités.

On estimera, pour fixer les idées (et en vue des applications géométriques), que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ encore que toute la théorie développée s'applique (sauf mention du contraire) à $\mathbb{K}$ quelconque.

A vrai dire, la définition 1 a un sens même pour $\mathbb{K}$ qui est un anneau (unitaire) parce que les axiomes 1° à 8° ne parlent pas de la division. Dans ce cas, la définition 1 introduit un *module* (sur l'anneau $\mathbb{K}$). La théorie des modules est sensiblement plus compliquée que celle des espaces vectoriels (à cause de l'opération de division), et nous ne nous en occuperons pas.

Remarque 2. Les axiomes 1° à 4° signifient que l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est un *groupe* abélien (ou commutatif) pour l'addition, tandis que les axiomes restants traduisent la propriété que le corps (resp. anneau) $\mathbb{K}$ est un corps (resp. anneau) des *opérateurs* de ce groupe. Ainsi, les espaces vectoriels (resp. modules) sur $\mathbb{K}$ sont des groupes abéliens (notés additivement) sur le corps (resp. anneau) $\mathbb{K}$ des opérateurs.

LEÇON 2

Conséquences simples des axiomes des espaces vectoriels. — Associativité de l'addition des vecteurs. — Notion de famille.

En théorie des espaces vectoriels, l'intuition géométrique est un outil inappréciable dont on devra se servir couramment dans l'interprétation géométrique des résultats et dans l'édification des théorèmes. On la bannira cependant de la démonstration qui s'appuiera uniquement sur les axiomes 1° à 8°. Avant de passer à des notions et des constructions importantes qui présentent un grand intérêt, on se voit donc obligé d'établir plusieurs conséquences « évidentes » du point de vue géométrique desdits axiomes.

* * *

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel quelconque.

1) L'axiome 3° dit qu'il existe dans $\mathcal{V}$ un vecteur nul sans préciser s'il est unique ou non. Il se trouve que $\mathbf{0}$ *est unique*, i.e. si $\mathbf{0}_1$ et $\mathbf{0}_2$ sont deux vecteurs de $\mathcal{V}$ tels que

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{0}_2 + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, alors $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. En effet, on pose $\mathbf{a} = \mathbf{0}_1$ dans $\mathbf{0}_2 + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ et on a $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1$. D'autre part, si l'on pose $\mathbf{a} = \mathbf{0}_2$ dans $\mathbf{0}_1 + \mathbf{a} = \mathbf{a}$, on obtient $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$, i.e. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. □

2) Bien que l'axiome 4° ne dise rien de l'unicité du vecteur opposé $-\mathbf{a}$, *ce vecteur est unique*, i.e. si

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

alors $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. En effet,

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c}. \ \square$$

3) Pour tout $\mathbf{a}$ et tout $\mathbf{b}$ de $\mathcal{V}$, *l'équation*

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

admet une solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$. En effet, si $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$, alors

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{x}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$$

et, d'autre part,

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + (-\mathbf{a})) = (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}. \quad \square$$

Nous écrirons $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ au lieu de $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

4) Le produit d'un segment orienté $\mathbf{a}$ par 0 est évidemment le vecteur nul :

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Le résultat subsiste pour les éléments $\mathbf{a}$ d'un espace vectoriel arbitraire. En effet,

$$0\mathbf{a} = (0 + 0)\,\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{a},$$

donc

$$0\mathbf{a} = 0\mathbf{a} - 0\mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad \square$$

5) De même,

$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

pour tout $k \in \mathbb{K}$. En effet,

$$k\mathbf{0} = k\,(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k\mathbf{0} + k\mathbf{0},$$

donc

$$k\mathbf{0} = k\mathbf{0} - k\mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \square$$

6) La formule

$$(-1)\,\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

est valable dans tout espace vectoriel. En effet,

$$\mathbf{a} + (-1)\,\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + (-1)\,\mathbf{a} = (1 - 1)\,\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

d'où, par suite de l'unicité du vecteur opposé, $(-1)\,\mathbf{a} = -\mathbf{a}$. $\square$

Chose curieuse, l'axiome 2° de la commutativité de l'addition découle des autres axiomes et de l'unicité du vecteur opposé. En effet, l'affirmation 6) démontrée moyennant la seule unicité du vecteur opposé entraîne

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + (-1)\,(\mathbf{b} + \mathbf{a}) =$$
$$= \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{b}) - \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

donc

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

7) L'axiome 1° énonce l'associativité de l'addition de trois vecteurs. Il se trouve qu'*il en est de même de la somme de n termes*. La démonstration du fait n'étant pas tout à fait triviale (contrairement aux résultats précédents) s'effectue à l'aide de plusieurs notions complémentaires.

* * *

Lorsque le nombre de termes à additionner est n, on fait, pour tout système de parenthèses, $n - 1$ sommes, la dernière opération

s'étendant sur 2 termes et deux seulement. Cela signifie que pour n termes $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ et tout système de parenthèses il existe un indice k, $2 \leqslant k \leqslant n$, défini de façon unique tel que la somme associée à ce système de parenthèses s'écrive

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

$\mathfrak{a}$ étant la somme des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ (correspondant à un certain système de parenthèses) et $\mathfrak{b}$ la somme des $\mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_n$ (correspondant elle aussi à un système de parenthèses). Quand $k = 2$, la somme $\mathfrak{a}$ se réduit à un terme unique, à savoir $\mathbf{a}_1$, et elle est $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ pour $k = 3$. De même, la somme $\mathfrak{b}$ se réduit pour $k = n$ au terme $\mathbf{a}_n$ et pour $k = n - 1$ à $\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n$.

Nous dirons de l'indice k que c'est le *rang* du système de parenthèses considéré (ou de la somme correspondante).

On définit par récurrence la somme de $n \geqslant 3$ termes *à système de parenthèses normal* (ou encore la *somme normale*). Cette somme est de la forme $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3$ pour $n = 3$.

Supposons connue la somme normale de $n - 1$ termes. La somme normale de n termes $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ est alors $\mathfrak{a} + \mathbf{a}_n$, $\mathfrak{a}$ étant la somme normale de $n - 1$ termes $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

Ainsi, la somme normale de n termes s'écrit

$$\underbrace{((\ldots}_{\substack{n-2 \\ \text{parenthèses}}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3) \ldots + \mathbf{a}_n).$$

Il suffit visiblement de démontrer que *la somme de $n \geqslant 3$ termes munie d'un système de parenthèses arbitraire est égale à la somme des mêmes termes à système de parenthèses normal.*

On raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 3$, l'affirmation se ramène à l'axiome 1°.

Supposons avoir démontré que toute somme de $n - 1$ termes au plus est égale à leur somme normale. Soit une somme quelconque de n termes $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ et soit k son rang. Si $k < n$, la somme s'écrit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{b}$ la somme d'au moins deux (et d'au plus $n - 1$) termes $\mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_n$. La somme $\mathfrak{b}$ est indépendante, par hypothèse de récurrence, du système de parenthèses, si bien que le résultat n'est pas changé quelle que soit la disposition des parenthèses (l'hypothèse de récurrence est impossible pour $k = n - 1$, mais cela est sans importance car dans ce cas les parenthèses sont absentes de la somme $\mathfrak{b}$).

En particulier, on estime que

$$\mathfrak{b} = \mathbf{a}_k + \mathfrak{c},$$

$\mathfrak{c}$ étant une somme de $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ (qui se réduit à $\mathbf{a}_n$ pour $k = n - 1$), le système de parenthèses étant absolument arbitraire.

En vertu de l'axiome 1°,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{a}_k + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_k) + \mathfrak{c},$$

la somme à droite étant de rang $k + 1$.

Ainsi, on augmente le rang d'un pas à l'autre pour aboutir à une somme de rang n, i.e. $\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}_n$, avec $\mathfrak{a}'$ une somme de $n - 1$ termes qui est égale par hypothèse de récurrence à la somme normale $\mathfrak{a}''$, auquel cas la somme donnée est elle aussi égale à la somme normale $\mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}_n$. □

L'affirmation démontrée permet d'écrire la somme d'un nombre quelconque de termes sans avoir recours aux parenthèses.

* * *

Nous nous occuperons dans la leçon suivante de notions et de théorèmes plus significatifs qui admettent une interprétation géométrique non triviale. Nous utiliserons entre autres la notion générale de famille d'éléments. Rappelons donc cette notion qu'on confond malheureusement si souvent avec la notion de partie.

Soit X un ensemble quelconque. On appelle *famille* (ou *suite*) de n éléments de X une application

$$(1) \qquad [1, \ldots, n] \to X$$

de l'ensemble $[1, \ldots, n]$ de n premiers entiers naturels dans X.

L'image de i, $1 \leqslant i \leqslant n$, dans cette application est d'ordinaire désignée par x_i (on dit que c'est le *terme d'indice i* de la famille), et toute la famille se note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou encore $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si (1) est une injection, i.e. si $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, on l'appelle *famille sans répétitions*. Elle définit une partie de n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X dont on dit qu'elle est associée à la famille (elle n'est rien autre que l'image de l'application (1)). On dit également que la famille donnée est *indexée* par cette partie.

A toute partie de n éléments il correspond évidemment $n!$ familles d'éléments distincts deux à deux qui se déduisent les unes des autres par un *réarrangement*.

On rappelle enfin qu'*une sous-famille de la famille* $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille quelconque de la forme $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, où $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$.

LEÇON 3

Dépendance linéaire. Indépendance linéaire.— Ensembles libres.— Propriétés élémentaires.— Théorème de dépendance linéaire.

Soient $\mathcal{V}$ un espace vectoriel quelconque et $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ une famille de ses éléments.

Définition 1. On appelle *combinaison linéaire à coefficients* $k_1, \ldots, k_m$ *des vecteurs* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ le vecteur

$$k_1\mathbf{a}_1 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m. \tag{1}$$

On dit également que le vecteur (1) *s'exprime linéairement* en fonction des vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Il est clair que le vecteur nul $\mathbf{0}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ quelconques (il suffit de poser $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_m = 0$).

Définition 2. La combinaison linéaire (1) est dite *non triviale* si au moins un des coefficients $k_1, \ldots, k_m$ est $\neq 0$. Elle est *triviale* dans le cas contraire.

Une combinaison linéaire triviale d'une famille quelconque de vecteurs vaut évidemment $\mathbf{0}$ (c'est le vecteur nul).

Définition 3. La famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est *liée* s'il existe une combinaison linéaire non triviale $=0$ des vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, i.e. s'il existe des nombres $k_1, \ldots, k_m$ *non tous nuls* tels que

$$k_1\mathbf{a}_1 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Dans le cas contraire, la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est *libre*.

On évite l'examen fastidieux des cas particuliers par adjonction à la classe des familles libres de la *famille vide* de vecteurs ($m = 0$). Ainsi, *la famille vide est libre* par définition. Cette définition a beau être un peu paradoxale, elle est parfaitement cohérente avec toutes les assertions relatives aux familles non vides.

* * *

Il est clair que *toute famille avec répétitions est liée*. En effet, soit $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. On a

$$1\mathbf{a}_1 + (-1)\,\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + \ldots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

et deux coefficients de cette combinaison linéaire sont non nuls. □

Soient $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ une famille quelconque où chaque terme figure une seule fois et $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m$ une famille obtenue de celle-ci par un certain réarrangement (de sorte que l'ensemble de vecteurs reste le même). Chose évidente, pour que $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m$ soit liée, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Cela garantit le caractère correct de la

Définition 4. Une partie finie de l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ est *liée* (resp. *libre*) si au moins une (donc chaque) numérotation de ses éléments fournit une famille liée (resp. libre).

Il est déjà connu qu'un *ensemble vide est libre*. Pour ce qui est d'une partie à un élément (un vecteur $\mathbf{a}$), *elle est libre si et seulement si* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. En effet, si $k\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $k \neq 0$, alors $\mathbf{a} = k^{-1}(k\mathbf{a}) = k^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, et si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, on a par exemple $1\mathbf{a} = \mathbf{0}$. □

* * *

Ci-dessous plusieurs propriétés simples mais utiles des notions introduites.

1) *Si un vecteur* $\mathbf{a}$ *s'exprime linéairement au moyen des vecteurs* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *et si chaque vecteur* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, *alors* $\mathbf{a}$ *est combinaison linéaire des* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$.

La démonstration est immédiate. □

On a donc la *transitivité*.

2) *Une famille (un ensemble) de vecteurs possédant une sous-famille (une partie) liée est liée.*

Il suffit de compléter la combinaison linéaire non triviale $= 0$ de vecteurs de la sous-famille par les vecteurs restants précédés de 0 de la famille. □

La propriété citée justifie la définition suivante qui présente parfois un intérêt.

Définition 5. Un ensemble infini de vecteurs est dit *lié* s'il contient une partie finie liée. Un ensemble infini de vecteurs est dit *libre* s'il en est de même de sa partie finie quelconque.

3) *Une famille (un ensemble) de vecteurs renfermant le vecteur nul est liée.*

En effet, pour obtenir la combinaison linéaire non triviale $= 0$, il suffit de munir le vecteur nul du coefficient 1 et tous les autres vecteurs de 0. On peut également s'appuyer sur l'affirmation 2) parce que le vecteur nul constitue une famille liée. □

4) *Une famille (un ensemble) de vecteurs est liée si et seulement si au moins un des vecteurs de la famille (de l'ensemble) s'exprime linéairement en fonction des autres.*

En effet, si

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

avec p.ex. $k_1 \neq 0$, alors

$$\mathbf{a}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{a}_2 + \ldots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\mathbf{a}_m.$$

Inversement, si

$$\mathbf{a}_1 = l_2\mathbf{a}_2 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m,$$

on a

$$(-1)\,\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

où $-1 \neq 0$. □

S'agissant des familles (non des ensembles) de vecteurs, on a un résultat plus précis, à savoir:

5) *La famille* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *est liée si et seulement si un vecteur* $\mathbf{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *de la famille est combinaison linéaire des vecteurs* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Démonstration. Si $\mathbf{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, s'exprime linéairement en fonction des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ (on a convenu plus haut que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ pour $i = 1$), alors la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i$ est liée (affirmation 4)), si bien qu'il en est de même de la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (affirmation 2)).

Inversement, soit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ une famille liée. Il existe i, $1 \leqslant i \leqslant m$, suffisamment petit pour que la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i$ soit liée ($i = 1$ si et seulement si $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$). Soit

$$k_1\mathbf{a}_1 + \ldots + k_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

combinaison linéaire non triviale $= 0$ des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i$. Il est clair que $k_i \neq 0$, sinon la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ est liée: contradiction avec l'hypothèse. Aussi on divise par k_i et on a

$$\mathbf{a}_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\mathbf{a}_1 + \ldots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\mathbf{a}_{i-1}. \quad \square$$

6) *La famille* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *est libre si et seulement si la représentation d'un vecteur quelconque sous la forme d'une combinaison linéaire des* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *est unique.*

Supposons, en effet, qu'un vecteur $\mathbf{a}$ s'exprime sous deux formes différentes

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m,$$
$$\mathbf{a} = l_1\mathbf{a}_1 + \ldots + l_m\mathbf{a}_m,$$

avec $k_i \neq l_i$ pour au moins un $i = 1, \ldots, m$. Faisons la différence, il vient la combinaison linéaire non triviale

$$(k_1 - l_1)\,\mathbf{a}_1 + \ldots + (k_m - l_m)\,\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

des vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Inversement, soit la combinaison linéaire non triviale

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Tout vecteur

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m,$$

qui s'exprime linéairement au moyen des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, s'écrit également

$$\mathbf{a} = (k_1 + \lambda_1)\,\mathbf{a}_1 + \ldots + (k_m + \lambda_m)\,\mathbf{a}_m. \quad \square$$

Les propriétés énumérées sont plus ou moins banales. Il en va tout autrement de la propriété que nous allons décrire, si bien que nous la mettrons sous la forme d'un théorème.

Théorème 1 (dépendance linéaire). *On suppose que chaque vecteur de la famille*

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \tag{2}$$

est combinaison linéaire des vecteurs

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n. \tag{3}$$

Si $m > n$, alors la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est liée.

Nous aurons besoin, pour démontrer le théorème, du

Lemme. *Hypothèse du théorème 1. On suppose en outre que la famille (2) est libre. Alors il existe pour tout $s = 0, \ldots, n$ une famille de vecteurs*

$$\mathbf{c}_1^{(s)}, \ldots, \mathbf{c}_n^{(s)} \tag{4}$$

telle que

a) *chaque vecteur de la famille (2) s'exprime linéairement en fonction des vecteurs (4);*

b) *les s premiers vecteurs de la famille (4) coïncident avec les s premiers vecteurs de la famille (2):*

$$\mathbf{c}_1^{(s)} = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{c}_s^{(s)} = \mathbf{a}_s.$$

Procédons par récurrence sur s. Le lemme est trivial pour $s = 0$ (on identifie (4) à (3)). Supposons le lemme démontré pour s et abordons le cas $s + 1$. Soit la famille

$$\mathbf{a}_{s+1}, \mathbf{c}_1^{(s)}, \ldots, \mathbf{c}_n^{(s)}. \tag{5}$$

Elle est liée car $\mathbf{a}_{s+1}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{c}_1^{(s)}, \ldots, \mathbf{c}_n^{(s)}$. Selon la propriété 5), il existe donc un vecteur de la famille (5) qui est une expression linéaire des vecteurs précédents. Cela ne peut être $\mathbf{a}_{s+1}$ qui est $\neq 0$ (la famille (2) est libre par hypothèse). Si $i \leqslant s$, alors $\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_i^{(s)}$ est combinaison linéaire des $\mathbf{a}_{s+1}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$, et la famille (2) est liée, ce qui contredit l'hypothèse. Aussi $i > s$. Il existe donc un nombre i pour lequel $\mathbf{c}_i^{(s)}$ s'exprime linéairement par $\mathbf{a}_{s+1}, \mathbf{c}_1^{(s)}, \ldots, \mathbf{c}_{i-1}^{(s)}$.

Extrayons de la famille (5) le vecteur $\mathbf{c}_i^{(s)}$. On obtient une famille de n vecteurs qui possède évidemment la propriété d'être combinaison linéaire de tout vecteur de (4), donc (propriété 1)) de chaque vecteur de (2). Ainsi, la famille concernée vérifie la condition a).

Elle la vérifie toujours si l'on met le vecteur $\mathbf{a}_{s+1}$ à la $s + 1$-ième place. La famille satisfait alors à la condition b) relativement au nombre $s + 1$. Le lemme se trouve démontré. □

Démonstration du théorème 1. Supposons le théorème faux, i.e. qu'avec ses hypothèses la famille (2) est libre. Cette famille vérifie

alors le lemme démontré. Or, le lemme dit pour $s = n$ que tout vecteur de la famille (2), en particulier $\mathbf{a}_m$, s'exprime de manière linéaire par les vecteurs $\mathbf{c}_1^{(n)} = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{c}_n^{(n)} = \mathbf{a}_n$. Etant donné $m > n$, cela signifie que la famille (1) est liée. Cette contradiction démontre le théorème. □

Une autre démonstration du théorème 1. Tout cours d'Algèbre enseigne qu'un système d'équations linéaires homogènes déficient (dont le nombre d'inconnues est *plus grand* que celui des équations) admet nécessairement une solution non nulle. Le théorème 1 en découle quasi automatiquement. En effet, il existe par hypothèse des nombres

$$\begin{matrix} k_{11}, \ldots, k_{1n}, \\ k_{21}, \ldots, k_{2n}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_{m1}, \ldots, k_{mn} \end{matrix}$$

tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= k_{11}\mathbf{b}_1 + \ldots + k_{1n}\mathbf{b}_n, \\ \mathbf{a}_2 &= k_{21}\mathbf{b}_1 + \ldots + k_{2n}\mathbf{b}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}_m &= k_{m1}\mathbf{b}_1 + \ldots + k_{mn}\mathbf{b}_n. \end{aligned}$$

Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \ldots + k_{m1}x_m &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{1n}x_1 + k_{2n}x_2 + \ldots + k_{mn}x_m &= 0. \end{aligned}$$

Comme $m > n$ par hypothèse, on trouve aux termes du théorème algébrique mentionné des nombres $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ non tous nuls qui vérifient ces équations. Dans ce cas

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}\mathbf{a}_1 + x_2^{(0)}\mathbf{a}_2 + \ldots + x_m^{(0)}\mathbf{a}_m = \\ = x_1^{(0)}(k_{11}\mathbf{b}_1 + \ldots + k_{1n}\mathbf{b}_n) + x_2^{(0)}(k_{21}\mathbf{b}_1 + \ldots + k_{2n}\mathbf{b}_n) + \ldots \\ \ldots + x_m^{(0)}(k_{m1}\mathbf{b}_1 + \ldots + k_{mn}\mathbf{b}_n) = \\ = (k_{11}x_1^{(0)} + k_{21}x_2^{(0)} + \ldots + k_{m1}x_m^{(0)})\,\mathbf{b}_1 + \ldots \\ \ldots + (k_{1n}x_1^{(0)} + k_{2n}x_2^{(0)} + \ldots + k_{mn}x_m^{(0)})\,\mathbf{b}_n = 0\mathbf{b}_1 + \ldots + 0\mathbf{b}_n = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donc la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est liée. □

Ici c'est l'algèbre qui s'est chargée du gros de la démonstration.

LEÇON 4

Vecteurs colinéaires.— Vecteurs coplanaires.— Interprétation géométrique de la colinéarité et de la coplanarité.— Familles génératrices de vecteurs. Bases. Dimension.— Axiome de la dimension.— Critère de base.— Coordonnées d'un vecteur.— Coordonnées de la somme de vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre.

Nous venons d'établir qu'un ensemble à un vecteur est libre si et seulement si son élément est $\neq 0$. Voyons ce qu'il en est des ensembles à 2 et 3 éléments.

* * *

Définition 1. Deux vecteurs sont *colinéaires* s'ils constituent un ensemble lié.

Soient **a** et **b** deux vecteurs colinéaires. Il existe par hypothèse des nombres k et l non simultanément nuls tels que

$$k\mathbf{a} + l\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Si $k \neq 0$, alors $\mathbf{a} = h\mathbf{b}$, où $h = -\frac{l}{k}$, et si $l \neq 0$, on a $\mathbf{b} = h\mathbf{a}$, $h = -\frac{k}{l}$. Il est clair qu'inversement **a** et **b** sont colinéaires si $\mathbf{a} = h\mathbf{b}$ ou $\mathbf{b} = h\mathbf{a}$.

Définition 2. On dit que deux vecteurs **a** et **b** *sont proportionnels* s'il existe un nombre h tel que $\mathbf{b} = h\mathbf{a}$.

Ainsi, *deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si au moins l'un d'eux est proportionnel à l'autre.* □

On n'oubliera pas que si **a** et **b** sont non nuls et l'un de ces vecteurs est proportionnel à l'autre, alors ce dernier est proportionnel au premier. La restriction « au moins l'un d'eux » se rapporte donc au cas éventuel d'un, et un seul, vecteur nul.

* * *

Définition 3. Trois vecteurs **a**, **b**, **c** sont *coplanaires* s'ils forment un ensemble lié.

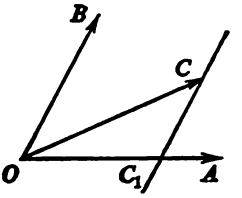
Selon la théorie générale (propriété 4) de la leçon 3), les vecteurs **a**, **b**, **c** sont coplanaires si et seulement si l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres, et s'il n'existe pas parmi **a**, **b**, **c** de vecteurs colinéaires deux à deux, chacun s'exprime linéairement en fonction des autres. Dans le cas de **a** et **b** colinéaires et **c** quelconque, ils sont coplanaires tous les trois.

* * *

Géométriquement, la colinéarité signifie évidemment que les deux vecteurs sont parallèles à une même droite ou (ce qui revient au même) sont portés par une même droite. Comment interpréter la coplanarité ?

Soient $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non colinéaires. Les trois points O, A, B définissent un seul plan. Ce plan contient **a**, **b**,

Vecteurs colinéaires



Vecteurs coplanaires

donc tout vecteur **c** de la forme $k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$. Ainsi, étant donnés **a**, **b**, **c** coplanaires, ils sont tous dans un plan (ou encore lui sont parallèles). On a évidemment ce résultat pour **a**, **b** colinéaires.

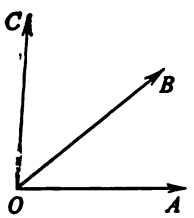
Inversement, soient $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ situés dans un même plan. On démontre la coplanarité. Le cas est trivial pour **a**, **b** colinéaires, si bien qu'on suppose $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ non colinéaires, ce qui définit le plan OAB. Par hypothèse, le point C est dans ce plan. La droite passant par C parallèlement à la droite OB coupe la droite OA en un point (unique) C_1. Par définition de la somme de deux vecteurs,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C}.$$

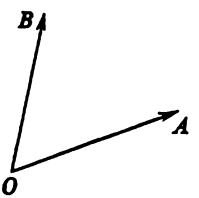
Le vecteur $\overrightarrow{OC_1}$ étant parallèle à $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ lui est proportionnel, donc $\overrightarrow{OC_1} = k\mathbf{a}$. De même, $\overrightarrow{C_1C} = l\mathbf{b}$. Ainsi,

$$\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b},$$

i.e. **a**, **b**, **c** sont coplanaires. □



a)



b)

c)

Vecteurs linéairement indépendants : *a*) dans l'espace, *b*) dans le plan, *c*) sur la droite

Soient O, A, B, C quatre points dans des plans différents. On a déjà vu que $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ sont alors linéairement indépendants. Ainsi, il existe dans l'espace des triplets libres de vecteurs.

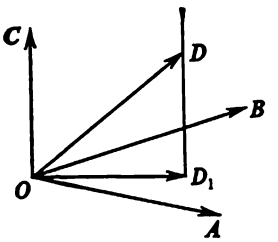
De même, il existe, dans le plan, des couples de vecteurs linéairement indépendants (il suffit de prendre O, A, B non alignés) et, sur la droite, des ensembles libres à un seul vecteur (il suffit de prendre deux points O, A distincts quelconques).

D'autre part, tout couple de vecteurs sur la droite et tout triplet vectoriel dans le plan sont liés, ainsi que tout ensemble de 4 vecteurs dans l'espace.

En effet, il suffit de considérer le cas de

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{OD},$$

avec **a**, **b**, **c** non coplanaires, i.e. les points O, A, B, C ne sont pas dans un même plan (donc O, A, B sont non alignés). La droite passant par D parallèlement à OC coupe le plan OAB en un point D_1



Quatre vecteurs dans l'espace

(bien défini). Comme **a**, **b**, $\overrightarrow{OD_1}$ sont coplanaires et **a**, **b** ne sont pas colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{OD_1}$ est combinaison linéaire de **a** et **b**. Comme

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D}$$

et $\overrightarrow{D_1D}$ est proportionnel par construction à $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, le vecteur $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ s'exprime linéairement en fonction de **a**, **b** et **c**.

Pour donner une certaine unité aux résultats obtenus, nous posons $n = 3$ pour la géométrie dans l'espace et $n = 2$ pour la géométrie dans le plan. On a les affirmations suivantes:

1. *Toute famille de m vecteurs, $m > n$, est liée.*
2. *Il existe des familles libres de n vecteurs.*

S'agissant des vecteurs sur la droite, ces affirmations jouent pour $n = 1$.

* * *

Les affirmations 1 et 2 ne découlent pas des axiomes 1° à 8° des espaces vectoriels. Quand on axiomatise la géométrie, ou bien on les accepte donc pour axiomes, ou bien on introduit un axiome qui sert à les démontrer.

Avant de formuler cet axiome on introduit la

Définition 4. Une famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ de vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est *génératrice* si tout vecteur de $\mathcal{V}$ est combinaison linéaire des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

On établit facilement que *dans une famille génératrice liée on extrait un vecteur de sorte que les vecteurs restants constituent une famille génératrice.*

En effet, si la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est liée, au moins un de ses éléments s'exprime linéairement par les autres. Soit, pour fixer les idées, $\mathbf{a}_m$ ce vecteur. Chacun des vecteurs de la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est combinaison linéaire des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}$, si bien qu'il en est de même de tout vecteur combinaison linéaire des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (par suite de la transitivité; voir propriété 1) de la leçon 3). Si la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est génératrice, la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}$ jouit donc de la même propriété. □

Définition 5. On dit qu'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est *de dimension finie* s'il existe une famille génératrice (finie) de vecteurs de $\mathcal{V}$.

Comme on vient de voir, *dans tout espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension finie il existe des familles libres génératrices de vecteurs.* En effet, une telle famille s'obtient en éliminant un nombre voulu de vecteurs d'une famille génératrice arbitraire tout en veillant à conserver sa propriété d'être génératrice.

Définition 6. On appelle *base* d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ toute famille libre et génératrice de vecteurs de $\mathcal{V}$.

Par définition, c'est justement une famille de vecteurs (et non un ensemble de vecteurs) qui constitue une base. D'autre part, toute permutation des vecteurs d'une base conserve les propriétés d'être génératrice et libre, si bien qu'on obtient toujours une base.

Soient $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une base et $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ une famille quelconque de vecteurs de $\mathcal{V}$.

Proposition 1. *Etant donnée une famille* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$,

a) *si elle est libre, alors* $m \leqslant n$,

b) *si elle est génératrice, alors* $m \geqslant n$.

Démonstration. Puisque la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est une famille génératrice, tout vecteur de la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ s'exprime linéairement en fonction de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Le théorème 1 de la leçon précédente entraîne donc que si $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ sont linéairement indépendants, alors $m \leqslant n$.

Si la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ est génératrice, tout vecteur de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ en est combinaison linéaire. Comme toute base est une famille libre de vecteurs, on a $m \geqslant n$ par le théorème mentionné. □

Conséquence. *Toutes les bases d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension finie comportent un même nombre de vecteurs.*

Définition 7. Ce nombre s'appelle *dimension* de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ et se note dim $\mathcal{V}$.

Si dim $\mathcal{V} = n$, on dit que l'espace $\mathcal{V}$ est *de dimension n* et on écrit $\mathcal{V}^n$.

On observe que dim $\mathcal{V} = 0$ si et seulement si $\mathcal{V}$ est réduit au vecteur nul.

* * *

Nous sommes à même de formuler un axiome supplémentaire 9° qui fait appel à un entier naturel n supposé, ou bien égal à 3 (variante « espace »), ou bien valant 2 (variante « plan »). Formellement, le cas $n = 1$ est également possible (il s'agit de la géométrie triviale de la droite), ainsi que le cas absolument dégénéré $n = 0$ (géométrie du point).

Axiome 9° (de la dimension). *L'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est de dimension finie et* dim $\mathcal{V} = n$.

S'agissant de ce $\mathcal{V}$, les affirmations 1 et 2 ci-dessus sont évidentes. En effet, l'affirmation 1 équivaut au point a) de la proposition 1, et l'affirmation 2 n'est rien autre que l'assertion portant sur l'existence des bases.

* * *

Dans un espace vectoriel de dimension n, toute base

a) comporte n vecteurs,

b) est une famille génératrice,

c) est une famille libre.

Chose remarquable, si la propriété a) a lieu pour une famille de vecteurs, la propriété b) implique c) et vice versa.

Proposition 2. *Une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension n est une base si et seulement si elle est, ou bien génératrice, ou bien libre.*

Démonstration. Il faut montrer qu'une famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ génératrice est libre et la réciproque.

Supposons $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ génératrice et liée. On en extrait un certain vecteur et on obtient une famille génératrice de $n - 1$ vecteurs: contradiction avec le point b) de la proposition 1. Par conséquent, la famille génératrice $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est libre.

Soit $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une famille libre. On démontre qu'elle est génératrice, i.e. que chaque vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ en est combinaison linéaire. Considérons la famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}$ de $n + 1$ vecteurs, donc liée (point a) de la proposition 1). Par conséquent, un vecteur de la famille s'exprime linéairement en fonction des vecteurs précédents.

Comme $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est libre par hypothèse, ce vecteur ne peut être que $\mathbf{a}$. □

* * *

Soit $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une base quelconque de $\mathcal{V}$. Pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ il existe des nombres $a^1, \ldots, a^n$ bien définis tels que

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n \tag{1}$$

(les indices supérieurs sont les numéros). L'existence des $a^1, \ldots, a^n$ est garantie par la propriété « la base est génératrice » et leur unicité par le fait que la base est libre.

Définition 8. Les nombres $a^1, \ldots, a^n$ sont les *coordonnées* du vecteur $\mathbf{a}$ dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

La formule (1) représente la *décomposition du vecteur* $\mathbf{a}$ *dans la base* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Dans la suite, cette formule (et les formules analogues) s'écrira

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i.$$

La présence d'un même indice simultanément en haut et en bas indique la sommation de 1 à n par rapport à cet indice. Cette écriture condensée a été proposée par Einstein.

* * *

Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ deux vecteurs et $a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^n$ leurs coordonnées respectives (par rapport à la même base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$). On a

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + b^n\mathbf{e}_n,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n + b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + b^n\mathbf{e}_n = \\ &= a^1\mathbf{e}_1 + b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n + b^n\mathbf{e}_n = \\ &= (a^1 + b^1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (a^n + b^n)\,\mathbf{e}_p.\end{aligned}$$

(Avec la convention d'Einstein, les calculs s'écrivent : $\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i\mathbf{e}_i + b^i\mathbf{e}_i = (a^i + b^i)\,\mathbf{e}_i$.) Ainsi, les coordonnées de la somme de deux vecteurs sont les sommes des coordonnées correspondantes des termes ou, en bref, lors de l'addition des vecteurs, leurs coordonnées s'ajoutent.

On a de même pour tout nombre k

$$k\mathbf{a} = k\,(a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n) = (ka^1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (ka^n)\,\mathbf{e}_n$$

(i.e. $k\mathbf{a} = k\,(a^i\mathbf{e}_i) = (ka^i)\,\mathbf{e}_i$). Ainsi, quand on multiplie un vecteur par un nombre, toutes ses coordonnées sont multipliées par ce nombre.

LEÇON 5

Isomorphismes d'espaces vectoriels.— Isomorphismes de coordonnées.— Isomorphie de deux espaces vectoriels de même dimension.— Méthode des coordonnées.— Espaces affines.— Isomorphie de deux espaces affines de même dimension.— Coordonnées affines. —Droites dans l'espace affine.— Segments.

Les propriétés établies des coordonnées s'énoncent en des termes plus invariants.

Définition 1. Soient $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ deux espaces vectoriels. L'application bijective

$$\varphi : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}''$$

est un *isomorphisme* si

$$\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$$

et

$$\varphi(k\mathbf{a}) = k\varphi(\mathbf{a})$$

quels que soient les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}'$ et le nombre k.

Les espaces vectoriels $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ sont *isomorphes* s'il existe au moins un isomorphisme $\mathcal{V}' \to \mathcal{V}''$, ce qui se note $\mathcal{V}' \approx \mathcal{V}''$.

L'application identique $\mathcal{V}' \to \mathcal{V}'$ est évidemment un isomorphisme, ainsi que l'application réciproque d'un isomorphisme et le produit d'isomorphismes. Il en résulte que la relation « être isomorphe » est une relation d'équivalence, i.e. elle est réflexive ($\mathcal{V}' \approx \mathcal{V}'$), symétrique (si $\mathcal{V}' \approx \mathcal{V}''$, alors $\mathcal{V}'' \approx \mathcal{V}'$) et transitive (si $\mathcal{V}' \approx \mathcal{V}''$ et $\mathcal{V}'' \approx \mathcal{V}'''$, alors $\mathcal{V}' \approx \mathcal{V}'''$). Ainsi, elle définit une partition de l'ensemble de tous les espaces vectoriels (sur $\mathbb{K}$ donné) en les classes disjointes d'espaces isomorphes.

En théorie axiomatique des espaces vectoriels on s'intéresse à leurs propriétés qui s'expriment en termes de l'addition et de la multiplication par les scalaires (ce sont d'ailleurs les seules qui puissent nous attirer). Il est clair que ces propriétés coïncident pour deux espaces isomorphes. Aussi deux espaces isomorphes sont identifiés en théorie axiomatique, ce qui permet de généraliser les résultats relatifs à un seul espace vectoriel à tous les espaces qui lui sont isomorphes. C'est en fait l'idée directrice de la *méthode des coordonnées*, la clef de voûte de la géométrie analytique.

* * *

En effet, les coordonnées $a^1, \ldots, a^n$ de tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{T}^{\cdot}$ (dans une base donnée $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$) forment une suite $(a^1, \ldots, a^n)$ élément de $\mathbb{R}^n$ (pour $\mathbb{K}$ quelconque, c'est un élément de l'espace $\mathbb{K}^n$ obtenu de façon analogue). La formule

$$\varphi(\mathbf{a}) = (a^1, \ldots, a^n) \tag{1}$$

définit donc une application (qui est visiblement une bijection)

$$\varphi : \mathcal{T}^{\cdot} \to \mathbb{R}^n.$$

Le fait que les coordonnées de la somme sont égales aux sommes des coordonnées est fourni par

$$\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}),$$

et le fait que les coordonnées du vecteur $k\mathbf{a}$ sont égales aux produits des coordonnées de $\mathbf{a}$ par k s'exprime par

$$\varphi(k\mathbf{a}) = k\varphi(\mathbf{a}).$$

L'application $\varphi : \mathcal{T}^{\cdot} \to \mathbb{R}^n$ est bien un isomorphisme.

Définition 2. L'isomorphisme défini par la formule (1) est un *isomorphisme de coordonnées* dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

On note un rôle spécial que jouent dans $\mathbb{R}^n$ n vecteurs

$$\begin{gathered}(1, 0, 0, \ldots, 0),\\ (0, 1, 0, \ldots, 0),\\ (0, 0, 1, \ldots, 0),\\ \cdots\cdots\cdots\\ (0, 0, 0, \ldots, 1).\end{gathered}$$

On conçoit qu'ils forment une base (appelée *base canonique* de $\mathbb{R}^n$), les coordonnées d'un vecteur quelconque $(a^1, \ldots, a^n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans cette base étant ses composantes $a^1, \ldots, a^n$, i.e.

$$\begin{aligned}(a^1, \ldots, a^n) &= \\ &= a^1(1, 0, \ldots, 0) + a^2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots \\ &\qquad \ldots + a^n(0, 0, \ldots, 1).\end{aligned}$$

L'isomorphisme (1) est visiblement caractérisé de façon unique en tant qu'isomorphisme $\mathcal{T}^{\cdot} \to \mathbb{R}^n$ qui transforme la base donnée $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathcal{T}^{\cdot}$ en la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il en découle que *tout isomorphisme $\mathcal{T}^{\cdot} \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme de coordonnées relativement à une base* (plus précisément à la base dont les vecteurs deviennent par cet isomorphisme les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

* * *

L'existence des isomorphismes $\mathcal{T}^{\cdot} \to \mathbb{R}^n$ donne lieu au

Théorème 1. *Tout espace vectoriel $\mathcal{V}^n$ de dimension n est isomorphe à l'espace* $\mathbb{R}^n$. □

En particulier, *deux espaces vectoriels quelconques de même dimension sont isomorphes* (ils ne le sont certes pas dans le cas contraire).

Ainsi, à une infinité d'espaces vectoriels il correspond l'ensemble dénombrable des classes d'espaces isomorphes. Ceci étant, pour tout entier non négatif $n \geqslant 0$ il existe une de ces classes, et une seule, qui comprend tous les espaces vectoriels de dimension n.

Chaque isomorphisme $\varphi: \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ de deux espaces vectoriels est défini par les bases respectives $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ et $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ et transforme le vecteur $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ en le vecteur $\mathbf{x}' = x^i\mathbf{e}'_i$ dont les coordonnées dans $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ sont les mêmes que celles dans $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ du vecteur $\mathbf{x}$. C'est pourquoi certains auteurs disent de l'isomorphisme φ qu'il est défini *par égalité des coordonnées.*

* * *

La méthode des coordonnées de la géométrie analytique consiste justement (en ce qui concerne les espaces vectoriels) à remplacer moyennant (1) un espace vectoriel $\mathcal{V}$ quelconque par l'espace $\mathbb{R}^n$ bien concret, ce qui permet de démontrer les théorèmes relatifs à $\mathbb{R}^n$ par les procédés de traitement analytique des nombres. Les raisonnements se simplifient au point que certains théorèmes sont établis presque automatiquement (tandis que leur démonstration « synthétique » moyennant des axiomes exige de règle qu'on fasse preuve d'une certaine ingéniosité).

On n'oubliera néanmoins pas que le résultat définitif doit avoir un « sens géométrique », i.e. il doit s'énoncer en termes d'opérations fondamentales pour que l'isomorphisme réciproque $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ le transpose à $\mathcal{V}$. Si cette condition n'est pas remplie, toute affirmation démontrée pour $\mathbb{R}^n$ n'a en général aucun sens dans $\mathcal{V}$ (quelle que soit la base).

Le fait est que l'*isomorphisme* (1) *dépend de la base*, si bien qu'on la conserve automatiquement en se plaçant dans $\mathbb{R}^n$. Or, seules les affirmations indépendantes de la base ont un « sens géométrique ». C'est le cas par exemple de l'affirmation « le vecteur est nul » (contrairement à « la première coordonnée du vecteur est nulle »).

Si l'idée séduisante d'algébriser complètement la géométrie en identifiant une fois pour toutes par l'isomorphisme (1) chaque espace vectoriel $\mathcal{V}^n$ et l'espace $\mathbb{R}^n$ n'est pas réalisée, la cause en est précisément le grand arbitraire laissé sur cette identification, qu'on n'arrive pas à réduire.

* * *

Une géométrie digne de ce nom ne se construit pas avec les seuls vecteurs, on doit y ajouter au moins les points. L'axiomatisa-

tion de la construction d'un vecteur connaissant deux points fera recours à la

Définition 3. On appelle *espace affine*, et on note $\mathcal{A}$, un ensemble d'éléments de nature quelconque appelés *points* pour lequel on définit

a) un espace vectoriel $\mathcal{V}$;

b) une application qui associe à deux points A, $B \in \mathcal{A}$ quelconques un vecteur de $\mathcal{V}$ noté $\overrightarrow{AB}$ qu'on appelle vecteur *d'origine* A et *d'extrémité* B. Deux axiomes suivants ont lieu:

10° Pour tout point $A \in \mathcal{A}$ et tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ il existe un point $B \in \mathcal{A}$ unique tel que

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}.$$

11° Pour trois points A, B, $C \in \mathcal{A}$ quelconques on a l'égalité

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Posons dans le dernier axiome $A = B = C$, il vient, comme souhaité, $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. Si l'on pose $C = A$, on a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

On dit que l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est *associé* à l'espace affine $\mathcal{A}$. Sa dimension dim $\mathcal{V}$ est par définition la *dimension* de $\mathcal{A}$ et se note dim $\mathcal{A}$.

Pour l'instant, nous nous occuperons naturellement des espaces affines de dimension $n \leqslant 3$. L'espace de dimension 1 est la *droite*, celui de $n = 2$ le *plan*, et celui de $n = 3$ est, hélas!, l'*espace*. Il y a plus. Comme on le verra plus loin, on appelle également droites et plans certaines parties de l'espace. Mais rien à faire, c'est l'usage qui le veut.

Les espaces affines font l'objet de la *géométrie affine*. La géométrie affine de notre conception part de deux notions primitives (point et vecteur) et de trois relations premières (relation entre trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ telle que $\mathbf{c}$ soit la somme de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$; relation entre deux vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, d'une part, et le scalaire k, de l'autre, qui s'énonce $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$; relation entre deux points A, B et le vecteur $\mathbf{a}$: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$). Ces relations doivent respecter les axiomes « vectoriels » 1° à 8°, l'axiome de la dimension 9° (pour n donné) et deux axiomes « affines » 10° et 11°.

Exemples d'espaces affines.

1) Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel quelconque. On définit l'espace affine $\mathcal{A}$ en posant $\mathcal{A} = \mathcal{V}$ et $\overrightarrow{\mathbf{ab}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Les axiomes 10° et 11° sont évidemment justes (pour tout « point » $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ et tout vecteur $\mathbf{c} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ est évidemment un « point » unique tel que

$\overrightarrow{\mathbf{ab}} = \mathbf{c}$; quels que soient les points **a**, **b**, **c**, on a l'égalité $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b})$). Ainsi, *on considère tout espace vectoriel $\mathcal{V}$ comme espace affine* et on le désigne par $\mathcal{V}_{\text{aff}}$.

2) En particulier, *l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est naturellement un espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.* (Ainsi, $\mathbb{R}^n$ désigne, ou bien un espace affine, ou bien un espace vectoriel, et on écrit $\mathbb{R}^n_{\text{aff}}$ et $\mathbb{R}^n_{\text{vec}}$ respectivement.) Si $A = (a^1, \ldots, a^n)$ et $B = (b^1, \ldots, b^n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n_{\text{aff}}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de $\mathbb{R}^n_{\text{vec}}$ se définit par la formule

$$\overrightarrow{AB} = (b^1 - a^1, \ldots, b^n - a^n).$$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux espaces affines et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ les espaces vectoriels associés.

Définition 4. On appelle *isomorphisme* de l'espace $\mathcal{A}$ sur l'espace $\mathcal{A}'$ une application bijective

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}',$$

telle qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ des espaces vectoriels associés et que deux points quelconques A et B de $\mathcal{A}$ vérifient l'égalité

$$\overrightarrow{\psi(A)\,\psi(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB}).$$

Deux espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont *isomorphes* s'il existe au moins un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$. Il est clair que s'agissant des espaces affines la relation « être isomorphe » est une relation d'équivalence.

On constate sans peine que tout espace vectoriel $\mathcal{V}^n$ de dimension n considéré comme espace affine (voir exemple 1)) est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{R}^n$. L'isomorphisme correspondant $\psi : \mathcal{V}^n_{\text{aff}} \to \mathbb{R}^n_{\text{aff}}$ est un isomorphisme de coordonnées quelconque $\mathcal{V}^n \to \mathbb{R}^n$ (l'isomorphisme associé étant $\varphi : \mathcal{V}^n_{\text{vec}} \to \mathbb{R}^n_{\text{vec}}$). Ainsi, l'isomorphisme entre $\mathcal{V}^n_{\text{aff}}$ et $\mathbb{R}^n_{\text{aff}}$ est défini par le choix d'une base dans $\mathcal{V}$.

D'autre part, *tout espace affine $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'espace vectoriel associé $\mathcal{V}$ considéré comme espace affine.* On définit cet isomorphisme en choisissant dans $\mathcal{A}$ un point arbitraire O et en posant

$$\psi(A) = \overrightarrow{OA}. \tag{2}$$

L'application $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ ainsi définie constitue évidemment un isomorphisme des espaces affines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}_{\text{aff}}$ (alors φ est l'application identique $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$).

Le vecteur (2) est par définition le *rayon vecteur* du point A. Il faut souligner qu'il dépend de l'origine O.

On réunit les deux affirmations démontrées en le

Théorème 2. *Tout espace affine $\mathcal{A}^n$ de dimension n est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{R}^n$.*

Autrement dit, *tous les espaces affines de même dimension sont isomorphes.*

Le système d'axiomes de la géométrie affine est bien complet: ils définissent de façon unique, à un isomorphisme près, l'espace concerné.

* * *

L'isomorphisme de $\mathcal{A}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est donné par un point $O \in \mathcal{A}$ quelconque (son choix détermine l'isomorphisme $\mathcal{A}^n \to \mathcal{V}^n_{\text{aff}}$) et une base quelconque $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathcal{V}^n$ (son choix détermine l'isomorphisme $\mathcal{V}^n_{\text{aff}} \to \mathbb{R}^n_{\text{aff}}$).

Définition 5. L'ensemble du point O et de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ s'appelle le *repère affine* dans $\mathcal{A}$ et se note $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$.

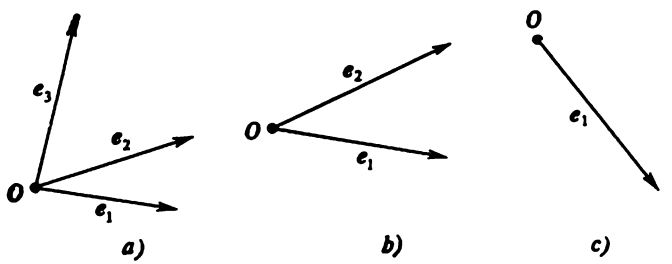
Lorsque $n = 3$ (cas de l'espace), le repère affine s'écrit $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Il est de la forme $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ pour $n = 2$ (dans le plan) et $O\mathbf{e}_1$ pour $n = 1$ (sur la droite).

D'après les résultats antérieurs, chaque repère affine $O\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ définit un isomorphisme $\psi: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ qui est par définition un *isomorphisme de coordonnées.*

Soit $A \in \mathcal{A}$ et

$$\psi(A) = (a^1, \ldots, a^n).$$

Définition 6. Les nombres $a^1, \ldots, a^n$ sont les *coordonnées* (*affines*) du point A dans le repère affine $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$.



Repère affine: *a*) dans l'espace, *b*) dans le plan, *c*) sur la droite

Elles ne sont rien d'autre que les coordonnées du rayon vecteur $\overrightarrow{OA}$ par rapport à la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\overrightarrow{OA} = a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n.$$

On a pour $n = 3$

$$\overrightarrow{OA} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3,$$

et pour $n = 2$

$$\overrightarrow{OA} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2.$$

Quant au rôle et à la signification des coordonnées affines, on n'a qu'à répéter les raisonnements relatifs aux coordonnées des vecteurs.

* * *

La géométrie affine basée sur les axiomes 1° à 11° est une partie de la géométrie élémentaire, qui n'utilise pas la mesure des longueurs et des angles. On verra que cette partie n'est pas tellement petite. En particulier, la notion de ligne droite y a un sens.

A partir de quels axiomes on introduit la notion de droite? On effectue comme toujours une étude préalable à un niveau géométrique intuitif.

Il est clair à ce niveau que toute droite (du plan ou de l'espace) est bien définie par son point M_0 quelconque et un vecteur arbitraire $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ parallèle à la droite, la condition d'appartenance d'un point M à la droite étant que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ soit colinéaire au vecteur $\mathbf{a}$, i.e. qu'il existe un nombre t tel que

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}. \tag{3}$$

Dans l'axiomatisation on fera usage de cette affirmation et on l'acceptera pour définition.

* * *

Soient $\mathcal{A}$ un espace affine quelconque et $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel associé.

Définition 7. La *droite* dans l'espace $\mathcal{A}$ définie par le point $M_0 \in \mathcal{A}$ et le vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ non nul est par définition l'ensemble des points $M \in \mathcal{A}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ soit colinéaire au vecteur $\mathbf{a}$, i.e. ces points vérifient pour un t l'égalité (3).

Le vecteur $\mathbf{a}$ s'appelle *vecteur directeur de la droite*. Tout vecteur colinéaire à $\mathbf{a}$ est dit *parallèle* à la droite donnée. Par suite de cette définition, *deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'ils sont parallèles à une droite* (ce fait établi en théorie intuitive l'est maintenant en théorie axiomatique).

On vérifie immédiatement que *toute droite de l'espace $\mathcal{A}$ est naturellement munie d'une structure d'espace affine de dimension* 1 (c'est la raison pour laquelle les espaces affines de dimension 1 s'appellent, même quand ils sont définis de façon abstraite, les droites; voir remarque ci-dessus).

En effet,

a) tous les vecteurs parallèles à une droite forment un espace vectoriel de dimension 1;

b) pour deux points A, B quelconques d'une droite, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A}$ appartient à cet espace vectoriel;

c) la correspondance établie $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ vérifie les axiomes 10° et 11°. □

Puisqu'il correspond à la valeur $t = 0$ le point M_0, ce point est sur la droite considérée. On dit également de cette droite qu'elle *passe par M_0 parallèlement au vecteur* **a**.

Le point M_0 et le vecteur **a** forment, on le constate facilement, un repère affine de la droite (considérée comme espace affine de dimension 1). La coordonnée de M dans ce repère est le nombre t de la relation (3).

Proposition 1. *Soient N_0 un point quelconque de la droite passant par M_0 parallèlement au vecteur* **a** *et* **b** *un vecteur non nul arbitraire qui est parallèle à la droite. Le point N_0 et le vecteur* **b** *définissent la même droite.*

Démonstration. Il existe par hypothèse des nombres t_0 et $h_0 \neq 0$ pour lesquels

$$\overrightarrow{M_0N_0} = t_0\mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b} = h_0\mathbf{a}.$$

Si

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a},$$

on a donc

$$\overrightarrow{N_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0N_0} = t\mathbf{a} - t_0\mathbf{a} = \tau\mathbf{b},$$

où $\tau = \frac{t - t_0}{h_0}$.

Inversement, soit

$$\overrightarrow{N_0M} = \tau\mathbf{b},$$

auquel cas

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{N_0M} + \overrightarrow{M_0N_0} = \tau\mathbf{b} + t_0\mathbf{a} = (\tau h_0 + t_0)\,\mathbf{a} = t\mathbf{a},$$

avec $t = \tau h_0 + t_0$. □

Ainsi, *une droite est définie par son point quelconque et un vecteur non nul arbitraire parallèle à la droite.*

Il est immédiat de vérifier que *pour deux points M_0 et M_1 quelconques d'une droite, le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ est parallèle à la droite.* En effet, on trouve par suite de (3) un nombre t_1 tel que

$$\overrightarrow{M_0M_1} = t_1\mathbf{a}.$$

Par conséquent, *la droite est bien définie par ses points M_0 et M_1*

distincts quelconques parce qu'elle l'est par le point M_0 et le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ non nul. En d'autres termes, *par deux points distincts M_0 et M_1 il passe au plus une droite.*

Les points M de cette droite (quand elle existe) se définissent à partir de la condition

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1},$$

t étant un paramètre quelconque. Inversement, cette relation donne par définition une droite pour M_0, M_1 distincts quelconques. Puisque $M = M_0$ pour $t = 0$ et $M = M_1$ pour $t = 1$, la droite passe par M_0 et M_1.

Ainsi, on vient de démontrer la

Proposition 2. *Par deux points distincts quelconques M_0 et M_1 de l'espace affine il passe une droite et une seule.* □

Cette droite se note M_0M_1.

* * *

Si le corps de base est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, on introduit la

Définition 8. On dit qu'un point M de la droite M_0M_1 *est entre* les points M_0 et M_1 si la valeur associée du paramètre t vérifie les inégalités $0 < t < 1$.

L'ensemble formé de tous les points de la droite M_0M_1 qui sont entre M_0 et M_1 et des points M_0 et M_1 mêmes est par définition un *segment* d'origine M_0 et d'extrémité M_1. Ainsi, les points du segment vérifient $0 \leqslant t \leqslant 1$. La notation correspondante est $\overline{M_0M_1}$.

LEÇON 6

Equations paramétriques d'une droite.— Equation d'une droite dans le plan.— Equation canonique d'une droite dans le plan.— Equation générale d'une droite dans le plan.— Droites parallèles.— Position relative de deux droites dans le plan.— Théorème d'unicité.— Position d'une droite par rapport aux axes de coordonnées.— Partage du plan par une droite.

Soit, dans l'espace affine $\mathcal{A}$, un point O quelconque. On récrit la relation (3) de la leçon 5, qui définit les points de la droite passant par le point M_0 parallèlement au vecteur $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{1}$$

où

$$\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}, \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$$

(on rappelle que $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$). Lorsque le paramètre t varie entre $-\infty$ et $+\infty$, le point M de rayon vecteur $\mathbf{r}$ défini par (1) parcourt toute la droite considérée. C'est la raison pour laquelle l'égalité (1) s'appelle l'*équation paramétrique vectorielle* de la droite.

Soit $n = 2$ (cas de la droite dans le plan). Choisissons un repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ quelconque et désignons par x, y les coordonnées du point M (i.e. les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$), par x_0, y_0 les coordonnées de M_0 et par l, m les coordonnées du vecteur $\mathbf{a}$ (par rapport à la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$). L'égalité (1) est équivalente à deux égalités numériques

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm, \end{aligned} \tag{2}$$

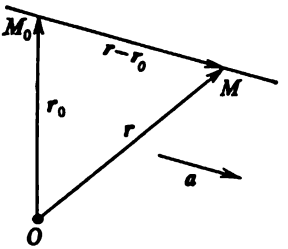
qui sont les *équations paramétriques* (en coordonnées) de la droite dans le plan.

Si $n = 3$ (cas de l'espace), on adjoint à (2) une troisième équation :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm, \\ z &= z_0 + tn \end{aligned} \tag{3}$$

(la troisième coordonnée de $\mathbf{a}$ se note traditionnellement n ; en effet, nous avons fixé la dimension 3, si bien que la lettre n peut être chargée d'une autre mission).

Quand la droite se définit par deux points M_0 et M_1 de rayons vecteurs respectifs $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}_1$ (et de coordonnées x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1



Droite définie par un point et un vecteur

pour $n = 3$), on estime que $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ (et corrélativement que $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$ et $n = z_1 - z_0$). Il en résulte que la droite M_0M_1 passant par les points M_0 et M_1 a pour équation paramétrique vectorielle

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0),$$

i.e.

$$\mathbf{r} = (1 - t)\,\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1, \tag{4}$$

et pour équations paramétriques en coordonnées

$$x = (1 - t)\,x_0 + tx_1,$$
$$y = (1 - t)\,y_0 + ty_1,$$
$$z = (1 - t)\,z_0 + tz_1$$

(c'est le cas de l'espace. S'agissant du plan, la dernière équation fait défaut.)

Arrêtons-nous sur les droites dans le plan (i.e. dans l'espace affine de dimension 2). Si l'on fixe dans le plan un repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, chaque droite possède des équations paramétriques de la forme (2). On a par élimination du paramètre t:

$$(x - x_0)\,m - (y - y_0)\,l = 0. \tag{5}$$

Si le point M est sur la droite, ses coordonnées x, y satisfont donc à l'équation (5). Inversement, si les nombres x, y vérifient (5) et si, disons, $l \neq 0$, les relations (2) ont lieu pour $t = \frac{x - x_0}{l}$ $\left(\text{pour } t = \frac{y - y_0}{m} \text{ si } m \neq 0\right)$, i.e. le point M de coordonnées x, y appartient à la droite étudiée. Aussi la relation (5) porte le nom d'*équation de la droite* définie par le point M_0 et le vecteur $\mathbf{a}$.

* * *

Lorsque $m \neq 0$ et $l \neq 0$, l'équation (5) se met sous la forme

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}. \tag{6}$$

Nous ferons la convention que l'égalité (6) a également un sens quand, ou bien $l = 0$ et $m \neq 0$, ou bien $m = 0$ et $l \neq 0$. A savoir, nous estimerons qu'elle équivaut pour $l = 0$ à $x - x_0 = 0$ et pour $m = 0$ à $y - y_0 = 0$. D'après cette convention, quels que soient l, m (non simultanément nuls), l'équation (6) est équivalente à (5) et constitue donc une équation de la droite concernée.

L'équation de la forme (6) est l'*équation canonique* de la droite.

* * *

Dans la suite, la notation M_0 (x_0, y_0) désigne un point M_0 de coordonnées x_0, y_0. De même, a (l, m) désigne un vecteur a de coordonnées l, m.

* * *

S'agissant de la droite M_0M_1 passant par les points M_0 (x_0, y_0) et M_1 (x_1, y_1), les coefficients l, m sont donnés par les égalités $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$. Ainsi, l'équation canonique de la droite en question s'écrit

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

On pose $A = -m$, $B = l$ et on récrit (5):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

C'est l'*équation générale* de la droite passant par le point M_0 (x_0, y_0).

Si l'on pose $C = -Ax_0 - By_0$, l'équation canonique prend la forme

$$Ax + By + C = 0. \tag{7}$$

On observe que *le vecteur directeur de la droite* (7) *a les coordonnées* B, $-A$.

Il est immédiat de vérifier que *toute équation* (7), *avec ou bien* $A \neq 0$, *ou bien* $B \neq 0$, *définit une droite*. En effet, on trouve des nombres x_0, y_0 tels que $Ax_0 + By_0 + C = 0$ (dans le cas $A \neq 0$, on prend par exemple $x_0 = -C/A$, $y_0 = 0$ et, dans le cas $B \neq 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = -C/B$) et on construit la droite qui passe par M_0 (x_0, y_0) parallèlement au vecteur a $(B, -A)$. L'équation (5) de cette droite ne diffère de l'équation donnée (7) que par le signe. □

* * *

Voyons quelle est la position relative de deux droites dans le plan.

Définition 1. Deux droites (dans le plan ou dans l'espace) sont *parallèles* si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires (et ils peuvent donc être choisis égaux).

Si deux droites parallèles ont au moins un point commun, elles se confondent (parce qu'une droite est définie de façon unique par un point et par son vecteur directeur). Ainsi, deux droites parallèles distinctes n'ont pas de point commun (elles ne se coupent pas).

Dans le plan les droites considérées ont pour équations

$$Ax + By + C = 0 \tag{8}$$

et

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0. \tag{9}$$

Les vecteurs directeurs de ces droites ayant les coordonnées respectives B, $-A$ et B_1, $-A_1$ et deux vecteurs étant colinéaires (i.e. proportionnels) si et seulement s'il en est ainsi de leurs coordonnées, une condition nécessaire et suffisante de parallélisme de (8) et (9) est

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}.$$

Il convient d'interpréter ces formules non comme l'égalité entre les nombres, mais comme des « proportions », autrement dit, on affirme l'existence d'un nombre $\rho \neq 0$ (coefficient de proportionnalité) pour lequel $A = \rho A_1$, $B = \rho B_1$. Aussi il se peut que le « dénominateur » A_1 s'annule, et cela si et seulement si A est nul. Il s'agit de la même convention que dans le cas des équations canoniques d'une droite.

Si les droites (8), (9) ont en commun le point M_0 (x_0, y_0), i.e.

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + C &= 0, \\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

et si elles sont parallèles, i.e. $A = \rho A_1$, $B = \rho B_1$ pour un $\rho \neq 0$, alors on multiplie la seconde équation par ρ et on fait la différence, il vient $C - \rho C_1 = 0$. Si

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1},$$

les égalités (10) sont donc impossibles, il n'y a pas de point commun et les droites (8) et (9) ne se coupent pas, et si

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

chacune des équations (8), (9) découle de l'autre, de sorte que les droites (8) et (9) sont confondues.

Dans le cas de (8), (9) non parallèles, i.e.

$$\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1},$$

les équations (8) et (9) possèdent une solution unique

$$x_0 = \frac{BC_1 - CB_1}{AB_1 - BA_1}, \quad y_0 = \frac{CA_1 - AC_1}{AB_1 - BA_1} \tag{11}$$

(ce sont les formules de Cramer pour le cas particulier de deux équations à deux inconnues). Cela signifie que deux droites non parallèles se coupent en un seul point (de coordonnées (11)).

Puisque les conditions établies épuisent toutes les possibilités et ne chevauchent pas, chacune est nécessaire et suffisante. On a donc démontré le

Théorème 1 (position relative de deux droites dans le plan). *Deux droites dans le plan peuvent*

a) *soit ne pas avoir de point commun,*

b) *soit avoir en commun un point et un seul,*

c) *soit se confondre.*

Le cas a) *est caractérisé par*

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1};$$

le cas b) *par*

$$\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1};$$

le cas c) *par*

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Les droites ayant les propriétés a) *et* c) *sont parallèles, et le cas* b) *équivaut au non-parallélisme.* □

* * *

En particulier, *deux équations* (8), (9) *définissent une même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.* Cette affirmation porte le nom de *théorème d'unicité* (pour les droites dans le plan).

* * *

Le repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ définit deux droites remarquables d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$. La droite $x = 0$ s'appelle l'*axe des ordonnées* (du repère considéré) et la droite $y = 0$ est l'*axe des abscisses*. L'axe des ordonnées se définit de façon unique comme droite repérée par le point O (0, 0) et le vecteur $\mathbf{e}_2$ et l'axe des abscisses comme droite repérée par O (0, 0) et $\mathbf{e}_1$.

Du théorème ci-dessus il résulte immédiatement que *la droite*

$$Ax + By + C = 0 \tag{12}$$

est parallèle

a) *à l'axe des ordonnées si et seulement si* $B = 0$,

b) *à l'axe des abscisses si et seulement si* $A = 0$.

On complète cette proposition en disant que *la droite* (12) *passe par l'origine O sous la condition nécessaire et suffisante* $C = 0$.

Si $B \neq 0$, i.e. si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors on pose $k = -A/B$, $b = -C/B$ et on écrit son équation sous la forme connue dès l'école secondaire:

$$y = kx + b.$$

Il est essentiel de remarquer que le corps de base K de la définition suivante est le corps R des nombres réels.

Définition 2. Etant donnée une droite (12) quelconque, on dit que deux points M_1, M_2 du plan n'appartenant pas à (12) *sont du même côté* (de (12)) si ou bien ils se confondent, ou bien le segment $\overline{M_1M_2}$ ($M_1 \neq M_2$) n'a pas de point commun avec la droite (12).

Dans le souci d'abréger l'écriture, on pose

$$F(x, y) = Ax + By + C.$$

Proposition 1. *Pour que les points* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ *n'appartenant pas à la droite* (12) *soient du même côté de* (12), *il faut et il suffit que les nombres* $F(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ ($\neq 0$) *soient de même signe.*

Démonstration. On suppose sans restreindre la généralité que $M_1 \neq M_2$. On a donc défini la droite M_1M_2 dont les équations paramétriques en coordonnées sont

$$x = (1 - t)\, x_1 + tx_2,$$

$$y = (1 - t)\, y_1 + ty_2$$

(cf. (4)). On cherche les points communs (s'ils existent) à M_1M_2 et à la droite (12) en portant ces expressions de x et y dans l'équation (12) et en résolvant par rapport à t. La substitution donne évidemment

$$(1 - t)\, F(x_1, y_1) + tF(x_2, y_2) = 0.$$

d'où

$$t = \frac{F(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)} \tag{13}$$

(si $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$, il y a non-existence, i.e. M_1M_2 est parallèle à la droite (12)).

D'autre part, les points M_1, M_2 sont par définition de part et d'autre de la droite (12) si et seulement si le nombre (13) existe et satisfait à $0 < t < 1$.

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que M_1 et M_2 soient de part et d'autre de la droite (12) est $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ et

$$0 < \frac{F(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)} < 1.$$

Si $F(x_1, y_1) > F(x_2, y_2)$, il faut et il suffit que $F(x_1, y_1) > 0$ et $F(x_2, y_2) < 0$. Dans le cas contraire, ces conditions sont $F(x_1, y_1) < < 0$ et $F(x_2, y_2) > 0$. Dans les deux cas, $F(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ sont de signes différents. Aussi M_1 et M_2 sont du même côté de (12) si et seulement si ces nombres sont de même signe. □

La proposition 1 entraîne de suite que la relation « être du même côté » est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence sont exactement deux.

Définition 3. Ces classes d'équivalences s'appellent les *demi-plans* définis par la droite (12).

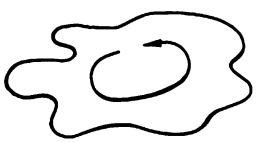
Ainsi, étant donnés deux points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ n'appartenant pas à la droite (12), ces points sont dans un même demi-plan si et seulement si le segment $\overline{M_1M_2}$ ne coupe pas cette droite, i.e. si $Ax_1 + By_1 + C$ et $Ax_2 + By_2 + C$ sont de même signe.

LEÇON 7

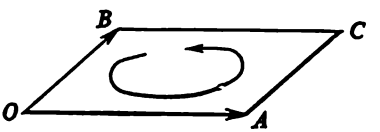
Définition intuitive d'un bivecteur.— Définition formelle d'un bivecteur.— Coïncidence des deux définitions.—Bivecteur nul.—Condition d'égalité de deux bivecteurs.—Condition de parallélisme d'un vecteur et d'un bivecteur.— Condition de $n = 3$.— Addition des bivecteurs.

Avant de passer à l'étude des droites dans l'espace, il y a intérêt à examiner les propriétés fondamentales des plans dans l'espace. Il se trouve que les deux théories sont parfaitement semblables à condition d'établir la notion de vecteur « plan ».

Si l'on se rappelle que géométriquement un vecteur est un segment orienté (i.e. un morceau de droite) qui « est plongé » dans l'espace, un vecteur « plan » est censé être une portion de plan « orientée » (une aire), de forme quelconque en général, qui jouit de la même



« Vecteur plan »



Bivecteur

propriété. Dire que cette aire est « orientée », c'est dire qu'on a défini sur elle un sens de rotation positif (dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire). Par analogie avec les vecteurs, deux portions de plan sont égales si

a) elles ont même aire,

b) elles sont parallèles à un même plan,

c) le sens de rotation est le même.

(Ces conditions donnent une idée de ce que c'est que des portions de plan qui « sont plongées dans l'espace ».)

La condition a) fait qu'on se borne, sans restreindre la généralité, à des aires de forme déterminée, disons des parallélogrammes. Or, le parallélogramme $OACB$ est défini de façon unique par les vecteurs $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Il y a plus. Ces vecteurs pris dans un certain ordre déterminent également le sens de rotation dans $OABC$ (on fait la convention, pour fixer les idées, que $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ — dans cet ordre! — définissent par exemple une rotation autour de O telle

que le point A suive le plus petit arc de cercle $\widehat{AB}$).

Cela signifie qu'on peut remplacer les portions de plan par les couples (**a**, **b**). On dit que deux couples de vecteurs sont égaux (ou, qui mieux est, équivalents) si les parallélogrammes construits sur ces vecteurs vérifient les conditions a), b) et c). La classe de couples équivalents (qui est justement l'analogue « plan » d'un vecteur) est un *bivecteur*.

* * *

Géométriquement, les conditions a), b), c) sont parfaitement claires. Malheureusement, nous ne saurons pas les incorporer dans notre système d'axiomes car les notions d'aire et de plan en sont pour le moment absentes. Si nous avouons de plus notre intention d'introduire ces notions à partir du concept de bivecteur, le lecteur comprendra que le seul moyen de ne pas tomber dans un cercle vicieux est de définir la relation d'équivalence des couples de vecteurs par un autre procédé qui soit valable pour tout espace vectoriel.

Définition 1. Soient **a**, **b**, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ des vecteurs d'un espace vectoriel arbitraire $\mathcal{V}$. On dit que le couple ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$) est déduit de (**a**, **b**) par une *transformation élémentaire*, et on note (**a**, **b**) $\Rightarrow$ ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$), si, ou bien

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a},\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} + k\mathbf{a} \text{ ou } \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} + k\mathbf{b},\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}, \tag{1}$$

avec k un nombre quelconque (un élément du corps fondamental K), ou bien

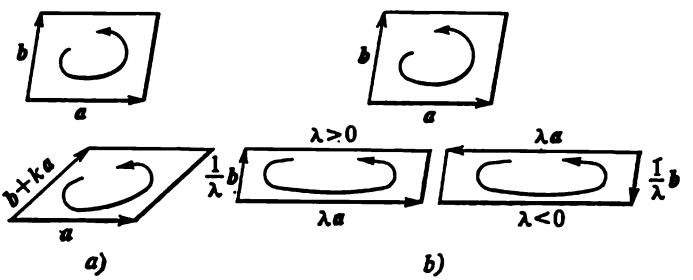
$$\mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{a},\quad \mathbf{b}_1 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{b}, \tag{2}$$

avec $\lambda \neq 0$ un nombre quelconque non nul.

On observe que si **a**, **b** ne sont pas colinéaires, il en est de même de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$. Cette propriété donne un sens à la

Définition 2. Deux couples de vecteurs sont dits *équivalents* si, ou bien chacun d'eux est formé de vecteurs colinéaires, ou bien l'un s'obtient de l'autre par plusieurs transformations élémentaires.

Il est clair que (**a**, **b**) $\Rightarrow$ (**a**, **b**) (il suffit d'appliquer (1), où $k = 0$). Si (**a**, **b**) $\Rightarrow$ ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$), alors ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$) $\Rightarrow$ (**a**, **b**). En effet, dans le cas (1), $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + k_1\mathbf{a}_1$ ou $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + k_1\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$, avec $k_1 = -k$;



a) Transformation élémentaire (1), *b*) transformation élémentaire (2)

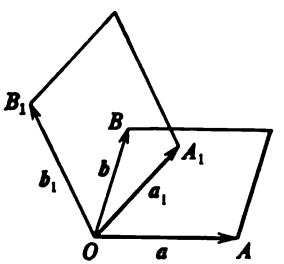
dans le cas (2), $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{b}_1$, avec $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$. Il en découle que la relation « être obtenu par plusieurs transformations élémentaires » est en effet une relation d'équivalence.

Définition 3. Les classes d'équivalence correspondantes constituent les *bivecteurs* de l'espace vectoriel $\mathcal{T}'$. Le bivecteur défini par le couple $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se note $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, et l'ensemble des bivecteurs est symbolisé par $\mathcal{T}' \wedge \mathcal{T}'$.

* * *

Pour justifier cette définition on a une fois de plus recours à l'intuition afin de montrer que les bivecteurs ainsi définis s'identifient (en ce qui concerne les couples non colinéaires) avec les bivecteurs portions de plan. Autrement dit, on montre que la relation d'équivalence formelle (définition 2) coïncide avec la définition « géométrique » basée sur les conditions a), b), c).

Les parallélogrammes construits sur les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, d'une part, et sur $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} + k\mathbf{a}$, de l'autre, ont évidemment même base et même hauteur. D'où l'égalité de leurs aires (condition a)). Ils sont



Aires équivalentes

les deux dans le même plan (condition b)) et présentent un même sens de rotation (voir la figure) (condition c)). La transformation élémentaire (2) se traite de façon analogue. Ainsi, deux couples de vecteurs (non colinéaires) étant équivalents au sens de la définition 2 sont équivalents en tant que portions de plan.

Inversement, soient $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ deux aires équivalentes, auquel cas les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ sont tous dans un même plan (condition b)). Les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont non colinéaires par hypothèse, si bien que $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_1$ se décomposent par rapport à ces vecteurs. On a donc les

égalités

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_1 &= k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b}, \end{aligned}$$

et $\delta = kl_1 - lk_1 \neq 0$ (sinon il y a colinéarité de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_1$).

En algèbre, le nombre δ se note $\begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}$ et porte le nom de déterminant.

Lemme 1. *Si les vecteurs* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ *d'un espace vectoriel quelconque* $\mathcal{V}$ *sont reliés par les égalités* (3), *avec* $\delta \neq 0$, *le couple* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *devient par transformations élémentaires le couple* $\left(\mathbf{a}_1, \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1\right)$.

Démonstration. Si $k \neq 0$, alors

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \Rightarrow \left(\mathbf{a} + \frac{l}{k}\mathbf{b}, \mathbf{b}\right) \Rightarrow \left(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \frac{1}{k}\mathbf{b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \frac{1}{k}\mathbf{b} + \frac{k_1}{k\delta}(k\mathbf{a} + l\mathbf{b})\right) =$$

$$= \left(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \frac{1}{\delta}(k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b})\right) = \left(\mathbf{a}_1, \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1\right).$$

Soit $k = 0$ (donc $l \neq 0$, $k_1 \neq 0$). Comme

$$(4)\qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a}) =$$

$$= (\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{b}, -\mathbf{a})$$

(plus loin nous aurons besoin de ce résultat intermédiaire) et

$$(\mathbf{b}, -\mathbf{a}) \Rightarrow \left(l\mathbf{b}, \frac{1}{l}\mathbf{a}\right) \Rightarrow \left(l\mathbf{b}, -\frac{1}{l}\mathbf{a} - \frac{l_1}{l^2k_1}l\mathbf{b}\right) =$$

$$= \left(l\mathbf{b}, \frac{1}{\delta}(k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b})\right) = \left(\mathbf{a}_1, \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1\right),$$

on aboutit une fois de plus au couple $\left(\mathbf{a}_1, \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1\right)$. □

Le lemme entraîne, vu les résultats obtenus, l'équivalence de $\left(\mathbf{a}_1, \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1\right)$ et $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ donc de $\left(\mathbf{a}_1, \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1\right)$ et $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$. Or, il est clair que l'aire de la première portion de plan est égale à celle multipliée par $\frac{1}{\delta}$ de la deuxième et que la rotation est dans les deux cas de même sens si et seulement si $\frac{1}{\delta} > 0$. Aussi $\delta = 1$ (conditions a) et c)). Le couple $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ se déduit de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ par transformations élémentaires. □

Nous venons de justifier les définitions 1, 2 et 3.

* * *

On observe que tous les couples colinéaires déterminent par définition un même bivecteur qui s'appelle *bivecteur nul* et se note 0. Ainsi, par définition, **a** *et* **b** *sont colinéaires si et seulement si* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$.

* * *

Soient deux bivecteurs $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ et $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1$. Quel est le critère de leur égalité ? Si au moins l'un d'eux est nul, la réponse est triviale : ces bivecteurs sont égaux si les vecteurs **a** et **b** sont colinéaires, ainsi que $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_1$. Sans restreindre la généralité, on se borne donc aux bivecteurs non nuls.

Proposition 1. *Deux bivecteurs* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1$ *non nuls sont égaux si et seulement si*

$$\mathbf{a}_1 = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}_1 = k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b} \tag{5}$$

et

$$\delta = kl_1 - lk_1 = \begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix} = 1.$$

Démonstration. D'après le lemme 1, les égalités (5) impliquent $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \wedge \frac{1}{\delta}\mathbf{b}_1$. Quand $\delta = 1$, le bivecteur $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1$ est donc égal à $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

La réciproque se démontre sous la condition suffisante

a) si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$, alors on a (5) avec $\delta = 1$;

b) s'il y a entre $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ et $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ les relations (5), $\delta = 1$, et si des relations analogues existent entre $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ et $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$, alors il en est de même de $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ et $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Le cas a) est trivial, et le cas b) est vérifié de suite : si

$$\mathbf{a}_1 = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}_2 = k'\mathbf{a}_1 + l'\mathbf{b}_1$$

et

$$\mathbf{b}_1 = k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}_2 = k_1'\mathbf{a}_1 + l_1'\mathbf{b}_1,$$

alors

$$\mathbf{a}_2 = (kk' + k_1l')\,\mathbf{a} + (lk' + l_1l')\,\mathbf{b},$$

$$\mathbf{b}_2 = (kk_1' + k_1l_1')\,\mathbf{a} + (lk_1' + l_1l_1')\,\mathbf{b}$$

et

$$(kk' + k_1l')(lk_1' + l_1l_1') - (lk' + l_1l')(kk_1' + k_1l_1') = \\ = (kl_1 - lk_1)(k'l_1' - l'k_1').$$

(Un lecteur averti ne tardera pas à remarquer la présence de la formule de multiplication des matrices et le théorème relatif au déterminant du produit, ce qui lui évitera les calculs.) □

* * *

Définition 4. On dira qu'un vecteur **e** est *parallèle* au bivecteur $\mathfrak{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$, et on notera $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$, si **e** s'exprime linéairement au moyen de **a** et **b**. Si $\mathfrak{a} = 0$, tout **e** est par définition parallèle à $\mathfrak{a}$.

Selon la proposition 1, cette définition est correcte (elle ne dépend pas du choix de **a** et **b**).

Chose à noter, le vecteur nul est par définition 4 parallèle à tout bivecteur.

Il est clair que $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$ dès que $\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$. La réciproque s'énonce sous forme de

Proposition 2. *Si* $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$ *et* $\mathbf{e} \neq 0$, *il existe un vecteur* **a** *pour lequel*

$$\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}.$$

Démonstration. Si $\mathfrak{a} = 0$, on pose $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ (ou $\mathbf{a} = 0$). Soit $\mathfrak{a} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \neq 0$. On trouve par hypothèse des nombres k et l tels que

$$\mathbf{e} = k\mathbf{a}_1 + l\mathbf{b}_1.$$

Choisissons k_1 et l_1 de façon que $kl_1 - lk_1 = 1$ (si $k \neq 0$, on pose p.ex. $k_1 = 0$, $l_1 = k^{-1}$, et dans le cas contraire $k_1 = -l^{-1}$ et $l_1 = 0$; vu que $\mathbf{e} \neq 0$, le cas $k = 0$, $l = 0$ est impossible) et posons

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + l_1\mathbf{b}_1.$$

La proposition 1 entraîne $\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$. □

* * *

Nous n'avons pas appliqué l'axiome de la dimension 9° aux bivecteurs. Supposons que $n = \dim \mathcal{V} \leqslant 3$ (en fait, seul le cas $n = 3$ présente de l'intérêt).

Proposition 3. *Pour tout couple de bivecteurs* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *il existe un vecteur* **e** *non nul tel que* $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$ *et* $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{b}$.

Démonstration. Si au moins un des bivecteurs concernés est nul, le résultat cherché est évident. On ne nuit donc pas à la généralité de l'exposé si l'on pose $\mathfrak{a} \neq 0$ et $\mathfrak{b} \neq 0$.

Soit $\mathfrak{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_1$, $\mathfrak{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}_1$. Dans un espace vectoriel de dimension $\leqslant 3$, quatre vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$ sont nécessairement linéairement dépendants, i.e. on indique des nombres k, k_1, l, l_1 non tous nuls pour lesquels

$$k\mathbf{a} + k_1\mathbf{a}_1 + l\mathbf{b} + l_1\mathbf{b}_1 = 0.$$

On pose

$$\mathbf{e} = k\mathbf{a} + k_1\mathbf{a}_1 = -(l\mathbf{b} + l_1\mathbf{b}_1).$$

Il est clair que $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$ et $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{b}$. De plus, $\mathbf{e} \neq 0$ par suite de l'indépendance linéaire de **a** et $\mathbf{a}_1$. □

* * *

Définition 5. On dit que le bivecteur $\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ est la *somme* de deux bivecteurs $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$ et $\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$. Par définition,

$$\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}). \tag{6}$$

Conformément aux propositions 3 et 2, on définit par cette formule la somme de deux bivecteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ quelconques: on utilise la proposition 3 et on cherche $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$ et $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{b}$; à la lumière de la proposition 2, on cherche $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ pour lesquels $\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$ et $\mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$; enfin, on pose

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Cette définition de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ comporte évidemment un grand arbitraire. On demande donc si elle est correcte, i.e. on demande l'indépendance de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ par rapport aux vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ (voir leçon 8).

LEÇON 8

La définition de la somme de deux bivecteurs est correcte.— Produit d'un bivecteur par un nombre.— Propriétés algébriques de la multiplication extérieure.— Espace vectoriel de bivecteurs.— Bivecteurs dans le plan et théorie des aires.— Bivecteurs dans l'espace.

Etant donnés deux bivecteurs $\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$ et $\mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$, on se place, pour démontrer le caractère correct de la définition de leur somme, dans diverses situations.

Soit $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{e}' \wedge \mathbf{a}'$, $\mathbf{e} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{e}' \wedge \mathbf{b}'$, avec $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} \neq 0$ et $\mathbf{e} \wedge \mathbf{b} \neq 0$. Selon la proposition 1 de la leçon précédente, on a

$$\mathbf{e}' = k\mathbf{e} + l\mathbf{a}, \qquad \mathbf{e}' = k'\mathbf{e} + l'\mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}' = k_1\mathbf{e} + l_1\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = k_1'\mathbf{e} + l_1'\mathbf{b},$$

où $kl_1 - lk_1 = 1$ et $k'l_1' - l'k_1' = 1$.

Cas $l = 0$, i.e. $\mathbf{e}' = k\mathbf{e}$, $k \neq 0$. Alors $(k' - k)\,\mathbf{e} + l'\mathbf{b} = \mathbf{0}$, donc $k' = k$, $l' = 0$ ($\mathbf{e}$ et $\mathbf{b}$ étant linéairement indépendants par hypothèse). De plus $l_1 = l_1' = k^{-1}$. Ainsi,

$$(\mathbf{e}',\ \mathbf{a}' + \mathbf{b}') = (k\mathbf{e},\ (k_1 + k_1')\,\mathbf{e} + k^{-1}(\mathbf{a} + \mathbf{b})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{e},\ k(k_1 + k_1')\,\mathbf{e} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})) \Rightarrow (\mathbf{e},\ \mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

i.e.

$$\mathbf{e}' \wedge (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

c.q.f.d.

Cas $l' = 0$. On procède comme plus haut à la différence qu'on accentue les coefficients qui ne l'étaient pas et vice versa. On établit cette fois encore que la définition de la somme de $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$ et $\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$ est correcte.

Cas $l \neq 0$ et $l' \neq 0$. On a

$$(\mathbf{a}' + \mathbf{b}') - \left(\frac{l_1}{l} + \frac{l_1'}{l'}\right)\mathbf{e}' =$$

$$= k_1\mathbf{e} + l_1\mathbf{a} + k_1'\mathbf{e} + l_1'\mathbf{b} - \frac{l_1}{l}(k\mathbf{e} + l\mathbf{a}) - \frac{l_1'}{l'}(k'\mathbf{e} + l'\mathbf{b}) =$$

$$= \left(\frac{lk_1 - l_1k}{l} + \frac{l'k_1' - l_1'k'}{l'}\right)\mathbf{e} = -\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right)\mathbf{e}$$

et

$$\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right)\mathbf{e}' = \frac{1}{l}(k\mathbf{e} + l\mathbf{a}) + \frac{1}{l'}(k'\mathbf{e} + l'\mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right)\mathbf{e}.$$

Donc

$$(\mathbf{e}', \mathbf{a}'+\mathbf{b}') \Rightarrow \left(\mathbf{e}', (\mathbf{a}'+\mathbf{b}') - \left(\frac{l_1}{l}+\frac{l_1'}{l'}\right)\mathbf{e}'\right) =$$

$$= \left(\mathbf{e}', -\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}\right)\mathbf{e}\right) \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}\right)\mathbf{e}', -\mathbf{e}\right) =$$

$$= \left((\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \left(\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}\right)\mathbf{e}, -\mathbf{e}\right) \Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b}, -\mathbf{e}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{e}, -\mathbf{e}) \Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{e}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{e}, \mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

i.e.

$$\mathbf{e}' \wedge (\mathbf{a}'+\mathbf{b}') = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Le dernier cas à étudier est celui où au moins un des bivecteurs donnés, disons $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$, est nul. Or, on a alors nécessairement $\mathbf{a} = k\mathbf{e}$, avec k un nombre (ne pas oublier que $\mathbf{e} \neq 0$ par hypothèse). Aussi

$$(\mathbf{e}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{e}, k\mathbf{e}+\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{e}, \mathbf{b}),$$

i.e.

$$0 + \mathfrak{b} = \mathfrak{b},$$

où $\mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$. Quelle que soit la construction, la somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est pour $\mathfrak{a} = 0$ égale à $\mathfrak{b}$, i.e. elle est définie correctement. Le cas $\mathbf{e} \wedge \mathbf{b} = 0$ se traite de façon analogue.

Ainsi, on a démontré que la définition de la somme de deux bivecteurs est correcte dans tous les cas possibles. □

Nous avons démontré en passant la propriété suivante du bivecteur nul : comme il se doit, le bivecteur nul est élément neutre pour l'addition des bivecteurs, i.e. $\mathfrak{a} + 0 = 0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ pour tout $\mathfrak{a}$.

En particulier, la formule (6) de la leçon 7 reste en vigueur pour $\mathbf{e} = 0$, i.e. pour n'importe quels vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

* * *

On observe que deux vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$ quelconques et tout k vérifient la relation

$$(\mathbf{e}, k\mathbf{a}) \Rightarrow (k\mathbf{e}, \mathbf{a}),$$

i.e.

$$\mathbf{e} \wedge k\mathbf{a} = k\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}.$$

Définition 1. On dit que le *produit* du bivecteur $\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}$ par le nombre k, et on note $k\mathfrak{a}$, est le bivecteur $k\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{e} \wedge k\mathbf{a}$.

Ainsi, on a par définition

$$k(\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}) = k\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{e} \wedge k\mathbf{a}. \tag{1}$$

Vérifions que cette définition est correcte.

Si $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = 0$, alors $k\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = 0$, i.e. $k\mathfrak{a} = 0$ si $\mathfrak{a} = 0$. La définition est donc correcte pour $\mathfrak{a} = 0$.

Soit $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} \neq 0$ et $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{e}' \wedge \mathbf{a}'$, i.e.

$$\mathbf{e}' = k_1\mathbf{e} + l_1\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}' = k_2\mathbf{e} + l_2\mathbf{a},$$

où $k_1l_2 - l_1k_2 = 1$. Lorsque $k \neq 0$,

$$k\mathbf{e}' = k_1(k\mathbf{e}) + (l_1k)\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}' = \frac{k_2}{k}(k\mathbf{e}) + l_2\mathbf{a},$$

et $k_1l_2 - l_1k\frac{k_2}{k} = k_1l_2 - l_1k_2 = 1$. Par conséquent,

$$k\mathbf{e}' \wedge \mathbf{a}' = k\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}.$$

L'égalité a évidemment lieu pour $k = 0$, si bien que le résultat voulu est complètement démontré. □

* * *

La définition de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ par l'intermédiaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ s'interprète comme une multiplication. Cette opération donne un élément extérieur sur l'espace vectoriel, d'où le nom de *multiplication extérieure.*

L'opération $\mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ s'appelle multiplication en raison de la formule (6) de la leçon précédente, qui n'est rien autre que la propriété *distributive* par rapport à l'addition.

La formule (1) traduit l'*homogénéité* de la multiplication extérieure par rapport à la multiplication par un nombre.

La relation (4) de la leçon 7 signifie que

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge (-\mathbf{a}),$$

i.e.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$$

par suite de l'homogénéité. Cette propriété s'appelle l'*anticommutativité.*

Il est connu que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ pour $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ colinéaires. Ce résultat découle immédiatement de l'anticommutativité et de l'homogénéité de la multiplication extérieure (à condition que le corps de base soit de caractéristique $\neq 2$). En effet, la propriété anticommutative fait que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$, donc $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ pour tout $\mathbf{a}$. Ainsi, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs colinéaires.

Or, l'anticommutativité n'entraîne pas que la colinéarité de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ constitue une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$. Il s'agit d'une propriété intrinsèque, si bien qu'on peut dire que la multiplication extérieure est *libre.*

Faisons le bilan. On a le

Théorème 1 (propriétés algébriques de la multiplication extérieure). *La multiplication extérieure est*

a) *distributive*:

$$\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$$

quels que soient les vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$;

b) *homogène*:

$$k\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge k\mathbf{b}$$

quels que soient les vecteurs **a**, **b** *et le nombre* k;

c) *anticommutative*:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$$

quels que soient les vecteurs **a** *et* **b**;

d) *libre*:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$$

si et seulement si les vecteurs **a** *et* **b** *sont colinéaires.* □

En menant des calculs, il y a intérêt à se rappeler que si

$$\mathbf{a}' = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b},$$

alors

$$\mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}' = \begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}). \tag{2}$$

Il s'agit en fait de l'affirmation du lemme 1 de la leçon 7 qu'on démontre cette fois par un calcul banal compte tenu des propriétés a), b) et c) ci-dessus.

En particulier, *si* $\mathbf{a} \parallel \mathfrak{a}$ *et* $\mathbf{b} \parallel \mathfrak{a}$, *alors le bivecteur* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ *est proportionnel au bivecteur* $\mathfrak{a}$. □

* * *

Nous avons donc défini sur l'ensemble $\mathcal{V}^* \wedge \mathcal{V}^*$ de tous les bivecteurs (pour $\dim \mathcal{V}^* \leqslant 3$ seulement) les opérations d'addition et de multiplication par un nombre. Est-ce que $\mathcal{V}^* \wedge \mathcal{V}^*$ constitue un espace vectoriel pour ces opérations?

Théorème 2. *L'ensemble* $\mathcal{V}^* \wedge \mathcal{V}^*$, $\dim \mathcal{V}^* \leqslant 3$, *est un espace vectoriel.*

Démonstration. Il est immédiat de vérifier les axiomes 2° à 8°. S'agissant de l'axiome 7°, on calcule par exemple

$$k\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = k\,(\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b})) = \mathbf{e} \wedge k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$$
$$= \mathbf{e} \wedge k\mathbf{a} + \mathbf{e} \wedge k\mathbf{b} = k\mathfrak{a} + k\mathfrak{b}$$

(ici $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \mathfrak{a}$ et $\mathbf{e} \wedge \mathbf{b} = \mathfrak{b}$).

L'axiome 1° (associativité de l'addition) exige un certain effort de démonstration, i.e. étant donnés trois bivecteurs quelconques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, on demande de vérifier l'égalité

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}). \tag{3}$$

Si au moins l'un de ces bivecteurs est nul, la relation (3) est évidente. On suppose donc, sans restreindre la généralité, que $\mathfrak{a} \neq 0$, $\mathfrak{b} \neq 0$ et $\mathfrak{c} \neq 0$.

Les propositions 3 et 2 de la leçon 7 aidant, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$ s'écrivent

$$\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}, \quad \mathfrak{c} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{c},$$

avec $\mathbf{e} \neq 0$. Si $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{b}$, i.e. s'il existe $\mathbf{b}$ tel que $\mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{b}$ (voir proposition 2), on démontre l'associativité:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{e} \wedge ((\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}) =$$
$$= \mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{e} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) =$$
$$= \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} + (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{c}) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

Le seul cas non trivial est donc $\mathbf{e} \nparallel \mathfrak{b}$.

Soit $\mathfrak{b} = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2$. Comme $\mathfrak{b} \neq 0$, il y a indépendance linéaire des $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ pour $\mathbf{e} \nparallel \mathfrak{b}$. Le cas $\mathbf{e} \nparallel \mathfrak{b}$ n'est donc possible que pour $\dim \mathcal{T} = 3$, auquel cas les vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ forment une base. On décompose $\mathbf{a}$ dans cette base:

$$\mathbf{a} = k\mathbf{e} + k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2.$$

Alors $\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}'$, où $\mathbf{a}' = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2$, autrement dit, on ne restreint en rien la généralité si l'on pose $\mathbf{a} \parallel \mathfrak{b}$.

De même, on pose $\mathbf{c} \parallel \mathfrak{b}$.

Soit

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{c} = l_1\mathbf{b}_1 + l_2\mathbf{b}_2.$$

Dans ce cas (voir (2))

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \delta\,(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) = \delta\mathfrak{b},$$

avec $\delta = k_1 l_2 - k_2 l_1 = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}$.

Si $\delta \neq 0$, on a donc

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} + \frac{1}{\delta}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = \left(\mathbf{e} - \frac{1}{\delta}\mathbf{c}\right) \wedge \mathbf{a}.$$

Puisque

$$\mathfrak{c} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{c} = \left(\mathbf{e} - \frac{1}{\delta}\mathbf{c}\right) \wedge \mathbf{c},$$

on a

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \left(\mathbf{e} - \frac{1}{\delta}\mathbf{c}\right) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{c}). \tag{4}$$

De même

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \frac{1}{\delta}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{c} = \left(\frac{1}{\delta}\mathbf{a} + \mathbf{e}\right) \wedge \mathbf{c},$$

$$\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = \left(\frac{1}{\delta}\mathbf{a} + \mathbf{e}\right) \wedge \mathbf{a}$$

et

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \left(\frac{1}{\delta}\mathbf{a} + \mathbf{e}\right) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{c}). \tag{5}$$

La démonstration s'achève (pour $\delta \neq 0$) dès qu'on remarque que la différence des seconds membres des formules (4) et (5) est nulle:

$$\left(\mathbf{e}-\frac{1}{\delta}\mathbf{c}\right)\wedge(\mathbf{a}+\mathbf{c})-\left(\frac{1}{\delta}\mathbf{a}+\mathbf{e}\right)\wedge(\mathbf{a}+\mathbf{c})=$$
$$=\left(\mathbf{e}-\frac{1}{\delta}\mathbf{c}-\frac{1}{\delta}\mathbf{a}-\mathbf{e}\right)\wedge(\mathbf{a}+\mathbf{c})=-\frac{1}{\delta}(\mathbf{a}+\mathbf{c})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c})=0.$$

Soit $\delta = 0$. On trouve alors un nombre h tel que $\mathbf{c} = h\mathbf{a}$. Comme $\mathbf{a} \parallel \mathfrak{b}$, il existe en outre un vecteur $\mathbf{b}$ pour lequel $\mathfrak{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Donc

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) + \mathbf{e} \wedge h\mathbf{a} =$$
$$= (\mathbf{e} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} + h\mathbf{e} \wedge \mathbf{a} = ((h + 1)\,\mathbf{e} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a}$$

et de même

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} + (-\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + h\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}) =$$
$$= ((h + 1)\,\mathbf{e} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a},$$

ce qui démontre la formule (3) et, partant, le théorème 2. □

* * *

Lorsque $n = 1$, le seul bivecteur possible est le bivecteur nul. Ainsi,

$$\mathscr{V}^1 \wedge \mathscr{V}^1 = 0,$$

donc $\dim(\mathscr{V}^1 \wedge \mathscr{V}^1) = 0$.

Soit $n = 2$ et soit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ une base quelconque de l'espace $\mathscr{V}^2$. On sait d'après la formule (2) que si

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2,$$

alors

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2). \tag{6}$$

Puisque $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \neq 0$, on a donc

$$\dim(\mathscr{V}^2 \wedge \mathscr{V}^2) = 1.$$

Ainsi, dans l'espace $\mathscr{V}^2$ (« dans le plan ») tous les bivecteurs sont proportionnels deux à deux, et toute base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ de $\mathscr{V}^2$ définit la base $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ de l'espace $\mathscr{V}^2 \wedge \mathscr{V}^2$. La coordonnée de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dans cette base est $\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$.

L'espace $\mathscr{V}^2 \wedge \mathscr{V}^2$ est donc peu intéressant du point de vue algébrique, fait qui ne nous surprend pas.

Cet espace permet néanmoins d'obtenir des résultats géométriques significatifs.

Si l'on se représente intuitivement les bivecteurs comme des portions de plan en forme de parallélogramme, on établit de suite

qu'étant donnés deux bivecteurs α_0 et α reliés par $\alpha = k\alpha_0$, le rapport de l'aire de α à celle de α_0 vaut $|k|$. Dans le cas particulier de α_0 d'aire 1 (on dit que le bivecteur α_0 est *l'étalon d'aire*), l'aire de α est $|k|$. A la lumière de la formule (6), on a donc la

Proposition 1. *Si la base* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *jouit de la propriété que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$ *vaut* 1, *alors l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\mathbf{a}\,(a^1, a^2)$ *et* $\mathbf{b}\,(b^1, b^2)$ *arbitraires est égale à la valeur absolue du déterminant*

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix},$$

i.e. à

$$|a^1b^2 - a^2b^1|. \ \square$$

L'aire du triangle OAB construit sur les vecteurs $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les mêmes vecteurs. Ainsi, *l'aire du triangle construit sur les vecteurs* $\mathbf{a}\,(a^1, a^2)$ *et* $\mathbf{b}\,(b^1, b^2)$ *est égale à la valeur absolue du nombre*

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}. \ \square$$

Si les sommets O, A, B du triangle ont les coordonnées respectives (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), alors $a^1 = x_1 - x_0$, $a^2 = y_1 - y_0$, $b^1 = x_2 - x_0$, $b^2 = y_2 - y_0$. Par conséquent, *l'aire du triangle de sommets en* (x_0, y_0), (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *est égale à la valeur absolue du nombre*

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}. \ \square$$

En théorie axiomatique des aires, on initialise avec le résultat obtenu au bout de plusieurs premiers pas : ayant choisi un bivecteur $\alpha_0 \neq 0$ pour étalon, l'aire d'un bivecteur $\alpha = k\alpha_0$ quelconque *se définit* comme $|k|$. On aboutit aux mêmes formules de calcul. Le détail des raisonnements est laissé au lecteur.

On aborde avec la même optique l'« aire orientée ». Cette aire est égale à k.

* * *

Soit $n = 3$ et $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ une base quelconque de l'espace $\mathcal{T}^3$. On calcule le produit extérieur des vecteurs

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3,$$

il vient

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\,(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + (a^3b^1 - a^1b^3)\,(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + \\ + (a^1b^2 - a^2b^1)\,(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2).$$

Cette formule s'écrit en termes de déterminants

$$(7)\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) - \\ - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2).$$

Afin de la retenir plus facilement, on écrit (nous supposons que le lecteur est au fait des déterminants introduits par le cours d'Algèbre) :

$$(8)\qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe formellement suivant les éléments de la première ligne, on obtient justement la formule (7).

Théorème 3. $\dim (\mathscr{V}^3 \wedge \mathscr{V}^3) = 3$.

Démonstration. La formule (7) signifie que la famille des bivecteurs $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ est génératrice. Il suffit donc de démontrer qu'elle est libre (si bien que c'est une base).

Soient k_1, k_2, k_3 des nombres tels que

$$k_1 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + k_2 (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + k_3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = 0.$$

Soit, p.ex. $k \neq 0$. Considérons les vecteurs

$$\mathbf{a} = -k_2\mathbf{e}_1 + k_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = -k_3\mathbf{e}_1 + k_1\mathbf{e}_3.$$

Si $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$, alors

$$-(\lambda k_2 + \mu k_3)\, \mathbf{e}_1 + (\lambda k_1)\, \mathbf{e}_2 + (\mu k_1)\, \mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

d'où $\lambda k_1 = 0$ et $\mu k_1 = 0$, i.e. $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants et, partant, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$.

D'autre part,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (-k_2\mathbf{e}_1 + k_1\mathbf{e}_2) \wedge (-k_3\mathbf{e}_1 + k_1\mathbf{e}_3) = \\ = k_1^2 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + k_1k_2 (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + k_1k_3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \\ = k_1 [k_1 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + k_2 (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + k_3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)] = 0,$$

contradiction qui démontre $k_1 = 0$ et

$$k_2 (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + k_3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = (k_2\mathbf{e}_3 - k_3\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 = 0.$$

Par suite de l'indépendance linéaire de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, cela n'est possible que pour $k_2 = 0$ et $k_3 = 0$.

Ainsi, toute combinaison linéaire nulle des bivecteurs $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ est nécessairement une combinaison triviale, i.e. ces bivecteurs sont linéairement indépendants par définition. □

Nous venons de démontrer un autre résultat: *pour toute base* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *de l'espace vectoriel* $\mathscr{V}^3$, *les bivecteurs* $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ *forment une base de l'espace vectoriel* $\mathscr{V}^3 \wedge \mathscr{V}^3$, la décomposition de tout bivecteur par rapport à cette base étant donnée par la formule (7) (ou (8)).

Il en découle en particulier qu'*un vecteur* $\mathbf{l}$ *de coordonnées* l, m, n (*dans la base* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) *est parallèle au bivecteur* $\alpha \neq 0$ *de coordonnées* A, B, C (*dans la base* $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$) *si et seulement si*

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{9}$$

En effet, si $\alpha = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, la propriété $\mathbf{l} \parallel \alpha$ équivaut à la propriété, pour $\mathbf{l}$, de s'exprimer linéairement au moyen de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Si a^1, a^2, a^3 et b^1, b^2, b^3 sont les coordonnées des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, la première ligne du déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

est donc une combinaison linéaire des deux autres, i.e. le déterminant est nul.

Inversement, la théorie des déterminants dit que si un déterminant est nul, ses lignes sont linéairement dépendantes. Ceci étant, le déterminant (10) a ses dernières lignes linéairement indépendantes (car $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$), si bien que la première ligne de (10) $= 0$ est une expression linéaire des deux autres, i.e. $\mathbf{l} \parallel \alpha$.

On a donc démontré que le vecteur $\mathbf{l}$ (l, m, n) est parallèle au bivecteur $\alpha = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ sous la condition nécessaire et suffisante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0. \ \square \tag{11}$$

On en déduit de suite la formule (9): il suffit de développer le déterminant (10) suivant les éléments de la première ligne et d'utiliser

$$A = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \tag{12}$$

conformément à (7).

LEÇON 9

Plans dans l'espace.— Equations paramétriques du plan.— Equation générale du plan.— Plan passant par trois points non alignés.

Par analogie avec la théorie des droites dans le plan, nous pouvons édifier la théorie des plans dans l'espace.

Soient $\mathcal{A} = \mathcal{A}^3$ un espace affine (de dimension 3) et $\mathcal{V} = \mathcal{V}^3$ l'espace vectoriel associé.

Définition 1. Pour tout point $M_0 \in \mathcal{A}$ et tout bivecteur non nul α de $\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$, on appelle *plan* de $\mathcal{A}$ défini par M_0 et α l'ensemble des points $M \in \mathcal{A}$ pour lesquels

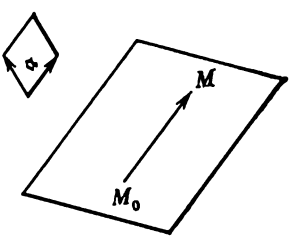
$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \alpha. \tag{1}$$

Si $\alpha = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, cette condition signifie qu'il existe des nombres u, v tels que

$$\overrightarrow{M_0M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}. \tag{2}$$

Le bivecteur α est un *bivecteur directeur* du plan. On dit qu'un vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ ou un bivecteur $\alpha' \in \mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$ sont *parallèles* au plan si $\mathbf{a} \parallel \alpha$ ou $\alpha' = k\alpha$ respectivement.

Tous les vecteurs parallèles au plan forment, on le voit facilement, un espace vectoriel de dimension 2. Il en résulte comme pour



Plan défini par le point M_0 et le bivecteur $\alpha \neq 0$

les droites (voir leçon 5) que tout plan est muni naturellement d'une structure d'espace affine de dimension 2 (attaché à l'espace vectoriel des vecteurs parallèles au plan).

Comme $\mathbf{0} \parallel \mathfrak{a}$, le point M_0 appartient au plan considéré, si bien qu'on dit également du plan défini par M_0 et un bivecteur $\mathfrak{a} \neq 0$ *qu'il passe par le point M_0 parallèlement au bivecteur* $\mathfrak{a}$.

Le point M_0 et les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ linéairement indépendants forment dans le plan un repère affine. Les coordonnées du point M dans ce repère sont les nombres u et v de (2).

Proposition 1. *Soit N_0 un point quelconque du plan passant par le point M_0 parallèlement au bivecteur $\mathfrak{a}$ et soit $\mathfrak{b}$ un bivecteur non nul quelconque parallèle au plan. Le point N_0 et le bivecteur $\mathfrak{b}$ définissent le même plan.*

Démonstration. Par hypothèse il existe des nombres u_0, v_0 et $h_0 \neq 0$ tels que

$$\overrightarrow{M_0N_0} = u_0\mathbf{a} + v_0\mathbf{b} \text{ et } \mathfrak{b} = h_0\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Si

$$\overrightarrow{M_0M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b},$$

on a donc

$$\overrightarrow{N_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0N_0} = (u - u_0)\,\mathbf{a} + (v - v_0)\,\mathbf{b} = u'\,(h_0\mathbf{a}) + v'\mathbf{b},$$

avec $u' = \dfrac{u - u_0}{h_0}$ et $v' = v - v_0$.

Inversement, soit

$$\overrightarrow{N_0M} \quad u'\,(h_0\mathbf{a}) + v'\mathbf{b}.$$

Alors

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{N_0M} \quad \overrightarrow{N_0M_0} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b},$$

où $u = u'h_0 + u_0$ et $v = v' + v_0$. □

Ainsi, un plan est défini par son point quelconque et par tout bivecteur non nul parallèle au plan.

Soit, dans $\mathcal{A}$, l'origine O. On suppose que

$$\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}, \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{OM}.$$

La formule (2) se récrit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}. \tag{3}$$

Lorsque les paramètres u et v varient de façon indépendante de $-\infty$ à $+\infty$, le point M de rayon vecteur défini par (3) parcourt le plan tout entier. C'est pour cette raison que la formule (3) constitue l'*équation paramétrique vectorielle* du plan.

Dans un repère affine quelconque $Oe_1e_2e_3$, l'équation (3) équivaut au système pour les coordonnées

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + ua^1 + vb^1, \\ y &= y_0 + ua^2 + vb^2, \\ z &= z_0 + ua^3 + vb^3. \end{aligned}$$

Ce sont les *équations paramétriques* (en coordonnées) du plan.

* * *

Analytiquement, la condition (1), i.e. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \parallel \alpha$, s'interprète de façons foncièrement différentes. Il découle par exemple de la relation (11) de la leçon 8 que cette condition équivaut à exiger la nullité du déterminant formé de coordonnées des vecteurs $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Ainsi, le point $M(x, y, z)$ appartient au plan considéré si et seulement si

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0,$$

bref, (5) est l'équation du plan passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ parallèlement au bivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

On développe le déterminant (5) par rapport aux éléments de la première ligne et on pose

$$(6)\qquad A = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix},$$

il vient l'*équation générale du plan passant par le point* $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Cette équation se récrit à condition de poser $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$:

$$(7)\qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Les formules (6) ci-dessus et les formules (12) de la leçon précédente montrent que *les coefficients A, B, C de l'équation* (7) *sont les coordonnées du bivecteur directeur* α (dans la base $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$).

Ainsi, on constate aisément que *toute équation de la forme* (7), *avec* $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, *définit un plan.* En effet, on cherche la solution de l'équation (7), on trouve un triplet de nombres (x_0, y_0, z_0) qui vérifie celle-ci (par exemple, on pose $x_0 = -\frac{D}{A}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ si $A \neq 0$) et on construit le plan passant par

M_0 (x_0, y_0, z_0) parallèlement au bivecteur α (A, B, C). Les résultats obtenus entraînent de suite que le plan est défini par l'équation (7). □

* * *

Nous dirons que le vecteur $\mathbf{l}$ (l, m, n) *est situé* dans le plan (7) (ou, ce qui revient au même, lui est *parallèle*) s'il est parallèle à son bivecteur directeur α (A, B, C), i.e. (voir formule (8) de la leçon 8) si

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{8}$$

On vérifie trivialement que *pour tout couple de points* M_0 (x_0, y_0, z_0) *et* M_1 (x_1, y_1, z_1) *du plan* (7), *le vecteur* $\overrightarrow{M_0M_1}$ *(de coordonnées* $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$*) est situé dans ce plan.* En effet, si $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ et $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, alors

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0. \quad \square$$

Si les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont dans le plan (i.e. s'ils sont parallèles à son bivecteur directeur α), leur produit extérieur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est proportionnel au bivecteur α et constitue donc un bivecteur directeur (à condition que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$). Il en découle, compte tenu de l'affirmation précédente, qu'*étant donnés trois points non alignés quelconques* M_0, M_1, M_2 *du plan, le bivecteur* $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2}$ *en est un bivecteur directeur.*

On pose dans (5) $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$ et on trouve l'écriture suivante pour l'équation du plan passant par les points M_0 (x_0, y_0, z_0), M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) non alignés

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Cela prouve en particulier l'unicité de ce plan.

D'autre part, l'équation (9) a un sens pour tout triplet de points non alignés M_0, M_1, M_2; elle prend la forme (7) (en explicitant le déterminant) et définit donc un plan qui contient évidemment les points donnés.

On a la

Proposition 2. *Par trois points non alignés quelconques* M_0, M_1 *et* M_2 *de l'espace affine il passe un plan et un seul.* □

Ce plan se note $M_0M_1M_2$.

LEÇON 10

Partage de l'espace par un plan.— Position relative de deux plans dans l'espace.— Droites dans l'espace.— Plan contenant une droite donnée et passant par un point donné.— Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace.— Position relative de deux droites dans l'espace.— Passage d'une base d'un espace vectoriel à une autre.

Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

un plan quelconque dans l'espace. On prend pour corps de base K le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Définition 1. On dit que deux points M_1 et M_2 non dans le plan (1) *sont du même côté* (du plan (1)) si, ou bien ils se confondent, ou bien le segment $\overline{M_1M_2}$ n'a pas de point commun avec (1).

Dans le but d'abréger les formules, on pose

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Proposition 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ n'appartenant pas au plan (1) soient du même côté est que les nombres (non nuls) $F_1 = F(x_1, y_1, z_1)$ et $F_2 = F(x_2, y_2, z_2)$ soient de même signe.*

Démonstration. On pose, sans réduire en rien la généralité, $M_1 \neq M_2$. On définit alors la droite M_1M_2 d'équations paramétriques en coordonnées

$$x = (1 - t)\, x_1 + tx_2,$$

$$y = (1 - t)\, y_1 + ty_2,$$

$$z = (1 - t)\, z_1 + tz_2.$$

On porte dans $F(x, y, z) = 0$ et on obtient pour déterminer t:

$$(1 - t)\, F_1 + tF_2 = 0,$$

d'où

$$t = \frac{F_1}{F_1 - F_2}$$

(si $F_1 = F_2$, il y a impossibilité, i.e. la droite M_1M_2 est parallèle au plan (1)). Si l'on se rappelle la leçon 6, on en déduit que $0 < t < 1$ si et seulement si F_1 et F_2 sont de signes différents, si

bien que « F_1 et F_2 sont de même signe » est une condition nécessaire et suffisante pour que le segment ne coupe pas le plan (1). □

La proposition 1 entraîne de suite que la relation « être du même côté » est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence correspondantes sont exactement deux.

Définition 2. Ces classes d'équivalence s'appellent les *demi-espaces* définis par le plan (1).

Ainsi, deux points distincts $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ non dans le plan (1) appartiennent à un même demi-plan si et seulement si le segment $\overline{M_1M_2}$ ne coupe pas le plan, i.e. si les nombres $F(x_1, y_1, z_1)$ et $F(x_2, y_2, z_2)$ sont de même signe.

* * *

Plaçons-nous dans le corps K quelconque.

Définition 3. Deux plans sont *parallèles* s'il y a proportionnalité de leurs bivecteurs directeurs (qu'on peut donc choisir égaux).

Si deux plans parallèles ont au moins un point commun, alors ils se confondent (car un plan est défini de façon unique par un point et un bivecteur directeur). Ainsi, les plans parallèles distincts ne possèdent pas de point commun (ils ne se coupent pas).

Considérons le cas où deux plans ont un point commun. Soient $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur du point et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des bivecteurs directeurs des plans.

Selon les propositions 2 et 3 de la leçon 7, il existe pour $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ un vecteur $\mathbf{e} \neq 0$ tel que

$$\mathfrak{a} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{a}, \qquad \mathfrak{b} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{b}.$$

On écrit donc les équations paramétriques vectorielles des plans:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{e} + v\mathbf{a}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{e} + v\mathbf{b}.$$

Il en résulte que la droite

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{e} \tag{2}$$

est contenue dans chacun des plans donnés (on définit ses points pour $u = t$, $v = 0$), ce qui prouve que l'intersection non vide de deux plans contient une droite tout entière.

Supposons que cette intersection contient au moins un point M_1 non sur la droite (2), auquel cas le vecteur $\mathbf{c} = \overrightarrow{M_0M_1}$ appartient aux deux plans, i.e. on a $\mathbf{c} \parallel \mathfrak{a}$ et $\mathbf{c} \parallel \mathfrak{b}$. Par construction $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{a}$ et $\mathbf{e} \parallel \mathfrak{b}$, si bien que le bivecteur $\mathbf{e} \wedge \mathbf{c}$ est proportionnel à $\mathfrak{a}$ et à $\mathfrak{b}$. Puisque $\mathbf{e} \wedge \mathbf{c} \neq 0$ par hypothèse, les bivecteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont proportionnels, i.e. les plans donnés sont parallèles et ils se confondent parce qu'ayant des points en commun.

Ainsi, *l'intersection non vide de deux plans distincts est une droite.* □

A priori, deux plans non parallèles peuvent avoir leur intersection vide. Or, il n'en est rien : *deux plans non parallèles ont nécessairement au moins un point commun* (et ils se coupent, comme il a apparu, suivant une droite). En effet, soient deux équations

$$(3)\qquad \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned}$$

qui définissent deux plans non parallèles. Leurs bivecteurs directeurs ont pour coordonnées A, B, C et A_1, B_1, C_1 respectivement, si bien que le triplet (A, B, C) n'est pas proportionnel au triplet (A_1, B_1, C_1) (en raison du non-parallélisme des plans), i.e. ou bien $\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}$, ou bien $\frac{A}{A_1} \neq \frac{C}{C_1}$, ou encore $\frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$. On suppose, pour fixer les idées, que $\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}$. Le système de deux équations

$$Ax + By + D = 0 \quad \text{et} \quad A_1x + B_1y + D_1 = 0$$

admet une solution unique $x = x_0$, $y = y_0$. Cela signifie l'appartenance du point de coordonnées $(x_0, y_0, 0)$ aux deux plans. □

Dans le cas de plans (3) parallèles, les triplets (A, B, C) et (A_1, B_1, C_1) sont proportionnels, i.e.

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Si on a de plus

$$\frac{A}{A_1} \neq \frac{D}{D_1},$$

les plans n'ont évidemment pas de point commun (cf. leçon 6, cas des droites), et si

$$\frac{A}{A_1} = \frac{D}{D_1},$$

les plans se confondent. La réciproque étant visiblement vraie, on a le

Théorème 1 (position relative de deux plans dans l'espace). *Etant donnés deux plans dans l'espace, on est dans l'un des cas suivants :*

a) *les plans n'ont pas de point commun ;*

b) *les plans possèdent une droite commune et une seule ;*

c) *les plans sont confondus.*

Le cas a) *est caractérisé par*

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \neq \frac{D}{D_1};$$

le cas b) *par le fait qu'on a au moins une inégalité*

$$\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}, \quad \frac{A}{A_1} \neq \frac{C}{C_1}, \quad \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1};$$

le cas c) *par*

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}.$$

Dans le premier et le troisième cas les plans sont parallèles et dans le deuxième ils ne le sont pas. □

On en tire une conséquence (*théorème d'unicité*) qui dit que les équations (3) définissent un même plan si et seulement si elles sont proportionnelles.

* * *

On voit que la droite dans l'espace peut être définie comme étant l'intersection de deux plans, i.e. elle est donnée par deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{cases}$$

On exige bien sûr que les coefficients A, B, C et A_1, B_1, C_1 ne soient pas proportionnels.

On vérifie immédiatement que *toute droite dans l'espace est l'intersection de deux plans*, i.e. elle se définit par des équations de la forme (4).

En effet, chaque droite contient par définition (voir leçon 5) tous les points $M(x, y, z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$, avec $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point donné, soit colinéaire à un vecteur donné a (l, m, n). Autrement dit, les coordonnées de $\overrightarrow{M_0M_1}$ et de a sont proportionnelles :

$$(5) \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

i.e. les coordonnées x, y, z de M satisfont à deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Mettons-les sous la forme

$$\begin{cases} m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0, \\ n(x - x_0) - l(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} mx - ly - (mx_0 - ly_0) = 0, \\ nx - lz - (nx_0 - lz_0) = 0, \end{cases}$$

il vient les équations (4) (à coefficients non proportionnels $A = m$, $B = -l$, $C = 0$ et $A_1 = n$, $B_1 = 0$, $C_1 = -l$). □

Les égalités (5) constituent les *équations canoniques* de la droite dans l'espace.

* * *

Nous allons illustrer les résultats obtenus sur la

Proposition 2. *Pour toute droite et tout point non sur cette droite, il existe un seul plan qui les contient.*

Démonstration. Soient le point M_1 (x_1, y_1, z_1) et les équations canoniques de la droite donnée:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

On suppose que le plan cherché existe, auquel cas les vecteurs $\mathbf{a}$ (l, m, n) et $\overrightarrow{M_0M_1}$ sont dans ce plan, et leur produit extérieur $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \mathbf{a}$ (non nul par hypothèse) est son bivecteur directeur. Ainsi, le plan concerné est défini par M_1 et par le bivecteur $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \wedge \mathbf{a}$, i.e. il l'est univoquement.

Le plan cherché existe évidemment: c'est le plan défini par le point M_0 et le bivecteur $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \mathbf{a}$. □

L'équation du plan s'écrit

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

* * *

On se demande quelle est la position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace.

Définition 4. Une droite est *parallèle* à un plan si son vecteur directeur $\mathbf{a}$ (l, m, n) est parallèle au bivecteur directeur α (A, B, C) du plan.

On sait (voir (9) de la leçon 9) qu'une condition nécessaire et suffisante en est

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{6}$$

D'après la proposition 2 de la leçon 7, on associe à $\mathbf{a} \parallel \alpha$ un vecteur $\mathbf{b}$ tel que $\alpha = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Si le plan et la droite parallèle ont en commun un point M_0 de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$, l'équation paramétrique vectorielle de la droite s'écrit donc

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{7}$$

et son homologue pour le plan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}. \tag{8}$$

Chaque vecteur (7) ayant la forme (8) (pour $u = t$, $v = 0$), on vient d'établir que, ou bien le plan et la droite parallèle n'ont pas de point commun (ils ne se coupent pas), ou bien la droite est entièrement contenue dans le plan.

On aboutit au même résultat si l'on porte les équations paramétriques de la droite

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm, \\ z &= z_0 + tn \end{aligned}$$

dans l'équation générale du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

ce qui donne

$$(Al + Bm + Cn)\, t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{9}$$

Si la droite est parallèle au plan (i.e. si l'on est dans la condition (6)), deux cas peuvent donc se présenter : ou bien l'équation (9) en t (définissant t pour les points communs à la droite et au plan) est vérifiée identiquement (quand le point M_0 appartient au plan, i.e. quand $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$), ou bien elle n'admet pas de solution (dans le cas contraire).

Comme l'équation (9) possède pour $Al + Bm + Cn \neq 0$ une solution et une seule, le plan et la droite non parallèle ont donc un point commun et un seul.

Résumons les résultats obtenus sous forme de

Théorème 2 (position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace). *Etant donnés un plan et une droite dans l'espace, trois cas sont possibles :*

a) *ou bien la droite et le plan ne se coupent pas ;*

b) *ou bien la droite et le plan ont un point commun unique ;*

c) *ou bien la droite est tout entière dans le plan.*

Le cas a) *est caractérisé par*

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad et \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0;$$

le cas b) *par*

$$Al + Bm + Cn \neq 0;$$

le cas c) *par*

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad et \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Dans les cas a) *et* c) *la droite est parallèle au plan. Elle ne l'est pas dans le cas* b). □

On étudie de même la position relative de deux droites dans l'espace.

* * *

Il est connu dès la leçon 6 que deux droites parallèles peuvent soit ne pas se couper, soit se confondre.

Nous venons d'établir que *pour deux droites parallèles non confondues il existe un plan et un seul qui les contient.*

En effet, soient M_1 (x_1, y_1, z_1) un point quelconque de la première droite et M_2 (x_2, y_2, z_2) un point quelconque de la deuxième. Considérons le plan dont l'équation paramétrique vectorielle s'écrit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v\mathbf{a}, \tag{10}$$

$\mathbf{a}$ (l, m, n) étant un vecteur directeur des droites données et $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de M_1 et M_2 respectivement. Le vecteur $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{a}$ (sinon les droites se confondent), si bien que la formule (10) définit bien un plan. Le fait qu'on obtient les points $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + v\mathbf{a}$ de la première droite pour $u = 0$ et les points $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + v\mathbf{a}$ de l'autre pour $u = 1$ achève la démonstration de l'existence d'un plan contenant les droites données. En coordonnées, l'équation du plan s'écrit

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Il suffit d'observer, pour prouver l'unicité, que tout plan contenant les points M_1 et M_2 et parallèle au vecteur $\mathbf{a}$ (son bivecteur directeur est donc de la forme $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \mathbf{a}$) est défini par l'équation paramétrique vectorielle (10). □

Prenons deux droites non parallèles. Elles ont au plus un point commun (deux droites ayant deux points communs se confondent, elles sont donc parallèles). On voit sans peine, comme dans le cas des droites parallèles, que pour *deux droites non parallèles ayant un point commun* (*i.e. les droites sécantes*), *il existe un plan et un seul qui les contient.*

En effet, le plan d'équation paramétrique vectorielle

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2,$$

avec $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur du point M_0 intersection des droites données et $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ leurs vecteurs directeurs, contient évidemment les deux droites (elles s'obtiennent l'une pour $u = 0$ et l'autre pour $v = 0$). Le plan est unique : il passe par le point donné M_0 et a le bivecteur directeur $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ donné (à un facteur de proportionnalité près). □

En coordonnées, l'équation du plan s'écrit

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

où l_1, m_1, n_1 et l_2, m_2, n_2 sont les coordonnées des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0.

Si deux droites non parallèles de vecteurs directeurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ ne se coupent pas, elles sont dites *non coplanaires*. D'autre part, chacune d'elles est parallèle à tout plan de bivecteur directeur $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$, i.e. ou bien elle est contenue dans ce plan, ou bien elle ne le coupe pas. Prenons un point M_1 de l'une des droites et menons par M_1 le plan de bivecteur directeur $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$, il vient le plan qui contient cette droite et qui ne rencontre donc pas l'autre droite. Aussi, quelque soit le point M_2 de la deuxième droite, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ ne s'exprime pas linéairement au moyen des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, d'où l'indépendance linéaire de $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et la non-nullité du déterminant de leurs coordonnées:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On a donc le

Théorème 3 (position relative de deux droites dans l'espace). *Deux droites dans l'espace sont*

a) *ou bien non coplanaires, donc non sécantes*;

b) *ou bien coplanaires et non sécantes*;

c) *ou bien coplanaires et sécantes en un seul point*;

d) *ou bien confondues.*

Le cas a) *est caractérisé par la non-nullité du déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}; \tag{12}$$

le cas b) *par la proportionnalité de deux dernières lignes de* (12) *qui ne sont par contre pas proportionnelles à la première*; *le cas* c) *par la non-proportionnalité de deux dernières lignes dont la première est par contre une combinaison linéaire*; *le cas* d) *par la proportionnalité de toutes les lignes de* (12).

Dans les cas b), d), *les droites données sont parallèles, et dans les deux autres, elles ne le sont pas.*

Remarque. Comme la droite est définie par deux plans, on est dans un cas particulier d'un théorème général parlant de la position relative de quatre plans dans l'espace. De même, le théorème 2 est un cas particulier d'un résultat général portant sur la position relative de trois plans dans l'espace. Il y a avantage à caractériser diverses positions des plans par la nullité (ou la non-nullité) de certains mineurs de la matrice des coefficients des équations générales des plans. Il s'agit en fait d'une réformulation géométrique (pour 3 inconnues et 3 ou 4 équations) des résultats algébriques généraux sur la résolution des systèmes d'équations linéaires. Le temps nous manque pour entrer dans le détail du problème, et nous conseillons au lecteur de s'en occuper sans faute.

* * *

On a noté plus haut (leçon 5) que les coordonnées (dans un espace vectoriel ou affine) sont choisies de diverses manières. Etudions l'arbitraire laissé sur ce choix. Si on ne l'a pas fait dans la leçon 5, c'est que le cours d'Algèbre n'a pas initié à ce moment les élèves à plusieurs notions indispensables (matrices et opérations sur les matrices).

Commençons par les espaces vectoriels. La dimension n est supposée quelconque, encore que seuls les cas $n = 1, 2, 3$ nous intéressent.

Soit, dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$, deux bases

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$$

(faites attention aux indices affectés d'accents. Cette notation paraît étrange, mais elle s'avère fort commode. Ce n'est d'ailleurs vrai que des cas généraux, et dans des cas concrets on préférera la notation usuelle, à savoir les accents affectant les lettres). On décompose les vecteurs $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= c^1_{1'}\mathbf{e}_1 + \ldots + c^n_{1'}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_{n'} &= c^1_{n'}\mathbf{e}_1 + \ldots + c^n_{n'}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{13}$$

Avec la convention d'Einstein, ces formules s'écrivent

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i.$$

On les met également sous forme matricielle.

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \ldots & c^1_{n'} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c^n_{1'} & \ldots & c^n_{n'} \end{pmatrix}$$

est la *matrice de passage* de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ à la base $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$. (On observe que les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e}_{1'}, \ldots$

. . ., $\mathbf{e}_{n'}$ en forment les colonnes.) On introduit les vecteurs lignes

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \text{ et } \mathbf{e}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}),$$

et on met (13) sous forme d'égalité matricielle

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}C. \tag{14}$$

On transpose les opérations connues effectuées sur les matrices numériques au cas de matrices des vecteurs et l'on suppose formellement que pour tout vecteur a et tout nombre k, le symbole ak signifie ka. On voit sans peine que toutes les règles d'opérations usuelles sur les matrices restent en vigueur. En particulier, tout couple de matrices C et C' vérifie l'égalité $(\mathbf{e}C)\,C' = \mathbf{e}\,(CC')$.

Si

$$\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''}$$

est une troisième base et

$$\mathbf{e}_{i''} = c_{i''}^{i'}\mathbf{e}_{i'},$$

i.e.

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'C',$$

$C' = (c_{i''}^{i'})$ étant la matrice de passage de $\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''}$ à $\mathbf{e}_{1''}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{e}_{n''}$ et $\mathbf{e}'' = (\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''})$, alors on a

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{e}\,(CC')$$

par suite de $(\mathbf{e}C)\,C' = \mathbf{e}\,(CC')$. On dit donc que *si C est la matrice de passage de la base* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *à* $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ *et C' la matrice de passage de* $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ *à* $\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''}$, *alors la matrice CC' est la matrice de passage de* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *à* $\mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''}$. □

Ce résultat est démontré facilement avec les notations d'Einstein. Comme $\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^{i}\,\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}_{i''} = c_{i''}^{i'}\,\mathbf{e}_{i'}$, on a

$$\mathbf{e}_{i''} = c_{i''}^{i'}\,(c_{i'}^{i}\mathbf{e}_i) = (c_{i''}^{i'}c_{i'}^{i})\,\mathbf{e}_i,$$

i.e. $c_{i''}^{i} = c_{i''}^{i'}\,c_{i'}^{i}$.

Dans le cas particulier $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}$, on obtient $CC' = E$, E étant une matrice unité, i.e. $C' = C^{-1}$. Ainsi, *avec C la matrice de passage de* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *à* $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$, *la matrice inverse C^{-1} est associée au changement de base inverse.* □

Avec nos notations, les éléments de C^{-1} s'écrivent $c_i^{i'}$ (seul l'accent en indice supérieur les distingue donc des éléments de C).

L'existence de C^{-1} montre que *toute matrice de passage C est non dégénérée.* □

Il est immédiat de vérifier qu'inversement, *toute matrice C non dégénérée est la matrice de passage de la base* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (*qui peut être quelconque*) *à une base* $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$. Autrement dit, les vecteurs $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ définis par les formules (13) constituent une base pour toute matrice non dégénérée C. En effet, ces vecteurs sont au nombre de n et ils sont linéairement indépendants (sinon la matrice C a ses colonnes linéairement dépendantes et son déterminant est donc nul, ce qui contredit l'hypothèse). □

LEÇON 11

Formules de transformation des coordonnées des vecteurs.— Formules de transformation des coordonnées affines des points.— Orientations.— Orientation induite de la droite.— Droite à orientation définie par une équation.— Orientation du plan dans l'espace.

On se propose d'établir les relations entre les coordonnées par rapport à deux bases distinctes $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ et $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$.

Les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ d'un vecteur quelconque $\mathbf{x}$ dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sont par définition données par

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \tag{1}$$

et les coordonnées $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ de $\mathbf{x}$ dans la base $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ par

$$\mathbf{x} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \tag{2}$$

Si

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \mathbf{e}_i, \tag{3}$$

on a donc

$$\mathbf{x} = x^{i'} (c^i_{i'} \mathbf{e}_i) = (x^{i'} c^i_{i'}) \mathbf{e}_i = (c^i_{i'} x^{i'}) \mathbf{e}_i$$

et, partant,

$$x^i = c^i_{i'} x^{i'}, \tag{4}$$

i.e.

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + \ldots + c^1_{n'} x^{n'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= c^n_{1'} x^{1'} + \ldots + c^n_{n'} x^{n'}. \end{aligned}$$

On observe que les formules (3) expriment la « nouvelle » base $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ par la base « ancienne » $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, tandis que les formules (4) donnent les « anciennes » coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ au moyen des coordonnées « nouvelles » $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$. En outre, la matrice associée n'est pas la matrice C, mais sa transposée $C^\top$. Ce fait est traduit formellement par la sommation qui s'effectue dans (3) par rapport aux indices sans accent et dans (4) par rapport à ceux affectés d'accent.

On trouve facilement les formules donnant les « nouvelles » coordonnées par les « anciennes » :

$$x^{i'} = c^{i'}_{i} x^{i}.$$

Le déplacement de l'accent signifie, on le sait, le passage à la matrice inverse.

Toutes les formules écrites présentent la particularité de structure suivante : dans les deux membres, les mêmes indices non muets sont simultanément en haut ou en bas. Grâce à cette particularité formelle et à la convention d'Einstein, on écrit souvent quasi automatiquement les formules correctes (et on décèle celles qui ne le sont pas).

Les *formules de transformation des coordonnées* (4) se mettent facilement sous forme matricielle.

On introduit, en plus de la matrice ligne $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ (voir leçon 10), la matrice colonne

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

et on récrit la formule (1) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}x$$

(l'ordre des facteurs est essentiel vu que c'est un produit de matrices). De même, on a pour la formule (2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}'x',$$

où $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ et

$$x' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

Si

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}C$$

(voir (14), leçon 10), on a donc

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}C)\, x' = \mathbf{e}\,(Cx')$$

et, partant,

$$x = Cx', \tag{5}$$

formule complètement équivalente à (4) (le passage à la matrice transposée s'est traduit par la prémultiplication par C).

* * *

Voyons le même problème pour les coordonnées affines dans l'espace affine.

Les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ d'un point M dans le repère affine $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ sont déterminées en deux étapes: 1) on construit le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$, 2) on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Si deux repères $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ et $O'\mathbf{e}_{1'} \ldots \mathbf{e}_{n'}$ ont même origine $O = O'$, le passage des coordonnées dans $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ à celles dans $O\mathbf{e}_{1'} \ldots \mathbf{e}_{n'}$ s'effectue donc par les formules connues pour les coordonnées des vecteurs.

Supposons au contraire que les repères ne diffèrent que par l'origine, i.e. qu'ils s'écrivent $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ et $O'\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$. Comme

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'},$$

il y a entre les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ et $x'^1, \ldots, x'^n$ des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M}$ les formules

$$x^i = x'^i + b^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$b^1, \ldots, b^n$ étant les coordonnées (dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$) du vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Dans le cas général, on combine naturellement ces transformations. Ainsi, étant données les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ du point M dans le repère $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ et les coordonnées $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ de M dans le repère $O'\mathbf{e}_{1'} \ldots \mathbf{e}_{n'}$, on a

$$x^i = c^i_{i'} x^{i'} + b^i, \tag{6}$$

avec $(c^i_{i'})$ la matrice de passage de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ à $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ et $b^1, \ldots, b^n$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OO'}$ dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

La formule (5) s'écrit en détaillant

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + \ldots + c^1_{n'} x^{n'} + b^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= c^n_{1'} x^{1'} + \ldots + c^n_{n'} x^{n'} + b^n, \end{aligned}$$

et en notations matricielles:

$$x = Cx' + b, \tag{7}$$

où

$$b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

La transformation des coordonnées est étroitement liée à la notion importante d'*orientation* qui explicite formellement l'idée

intuitive qu'on a du sens de parcours sur la droite (à droite ou à gauche), du sens de rotation dans le plan (dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens contraire), du mouvement d'un tire-bouchon dans l'espace (vis à droite ou vis à gauche).

Contrairement à l'exposé antérieur, l'hypothèse de $K = R$ est essentielle.

Définition 1. Deux bases $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ et $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ d'un espace vectoriel $\mathcal{T}$ sont dites *de même sens* si la matrice C associée au changement de base a pour déterminant

$$\det C > 0.$$

Si $\det C < 0$, les bases sont dites *de sens contraires*.

Deux repères affines $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ et $O'\mathbf{e}_{1'} \ldots \mathbf{e}_{n'}$ d'un espace affine $\mathcal{A}$ sont *de même sens* (resp. *de sens contraires*) si les bases $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ et $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ de l'espace vectoriel associé $\mathcal{T}$ sont de même sens (resp. de sens contraires).

Puisque l'ensemble des matrices à déterminant positif est un *groupe* (i.e. il est fermé par rapport aux opérations produit et prise de la matrice inverse), la relation « être de même sens » est une relation d'équivalence.

Définition 2. Les classes de bases (resp. de repères) de même sens s'appellent les *orientations* de l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ (resp. espace affine $\mathcal{A}$).

Il est clair qu'*il existe exactement deux orientations*: les bases (repères) sont de même sens ou non selon qu'ils définissent une même orientation ou des orientations différentes. L'orientation autre que o se note $-o$ et s'appelle l'*orientation opposée*.

On dit également des bases (repères) de même sens qu'elles *ont même orientation*.

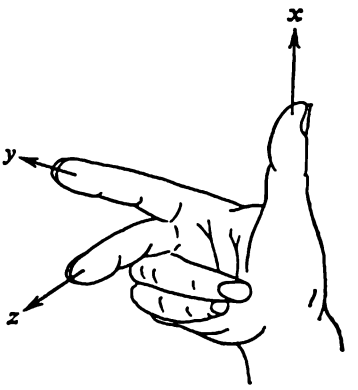
Il arrive souvent qu'on établit la propriété décrite de deux bases $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ dont les vecteurs sont donnés par leurs coordonnées dans une troisième base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Soit $\Delta_\mathbf{a}$ (resp. $\Delta_\mathbf{b}$) le déterminant formé de colonnes des coordonnées des $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ (resp. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$). Il est clair que par exemple $\Delta_\mathbf{a}$ n'est rien autre que le déterminant de la matrice de passage de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ à $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Aussi *les bases* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *et* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ *sont de même sens si et seulement si les déterminants* $\Delta_\mathbf{a}$ *et* $\Delta_\mathbf{b}$ *sont de même signe.* □

Définition 3. Un espace vectoriel (ou affine) est dit *orienté* si l'on le munit d'une orientation. Cette orientation est *positive* et l'orientation opposée est *négative*. Corrélativement, une base ou un repère sont dits *directs* ou *rétrogrades* selon que l'orientation de l'espace est oui ou non l'orientation définie par la base ou le repère.

Chose à noter, on *ne saurait* des fois distinguer une orientation déterminée de deux orientations possibles d'un espace vectoriel (affine) par des procédés mathématiques intrinsèques. On fait appel

à cet effet à des concepts étrangers aux mathématiques (disons, à la rotation de la Terre ou à l'anatomie du corps humain).

Ainsi, orienter la droite, c'est faire choix de l'un ou de l'autre sens de parcours possible. Si la droite est représentée par une ligne horizontale, on choisit d'habitude le sens allant de gauche à droite (qui est le plus familier, ne serait-ce que parce que la plupart des peuples civilisés écrivent de gauche à droite) comme sens positif (orientation « positive »). Il ne faut néanmoins pas oublier que le sens n'est pas invariant : on retourne le dessin représentant la droite et le sens positif devient négatif et vice versa.



Système droit

Dans le cas des droites verticales, le sens positif est d'ordinaire celui de bas en haut.

Orienter le plan, c'est fixer un « sens de rotation » (dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens contraire) tel qu'on amène par le plus court chemin le premier vecteur de la base (qui définit l'orientation donnée) dans la direction du deuxième. L'orientation « positive » correspond dans ce cas au mouvement dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (l'axe des abscisses est dirigé de gauche à droite et l'axe des ordonnées de bas en haut). Cette convention est purement formelle car l'orientation s'inverse si l'on regarde le plan du côté opposé.

Regardez la paume de votre main droite. Le pouce et l'index forment une base de sens contraire aux aiguilles d'une montre, si bien que le sens contraire aux aiguilles d'une montre est qualifié de droit ou de direct et le sens opposé de gauche ou d'indirect.

S'agissant de l'espace, le sens direct est celui d'une « base » formée du pouce, de l'index et du majeur de la main droite. Aujourd'hui on prend de règle pour orientation « positive » l'orientation définie par une base de sens direct (que certains auteurs avaient autrefois appelée orientation négative).

En ce qui concerne l'orientation dans l'espace, les termes droit et gauche sont invariants parce qu'il est impossible de regarder l'espace « de l'autre côté », pas plus que de faire coïncider la main gauche et la main droite. On ne saurait néanmoins les définir de manière mathématique intrinsèque.

* * *

L'orientation du plan (de l'espace affine de dimension 2) n'est nullement liée à l'orientation des droites (des espaces affines de dimension 1) du plan. On les relie entre autres par la notion de « côté » de la droite.

Définition 4. On définit le *côté* de la droite d du plan par le choix de l'un des demi-plans déterminés par d. Le côté choisi est dit *positif*, le côté opposé étant *négatif*.

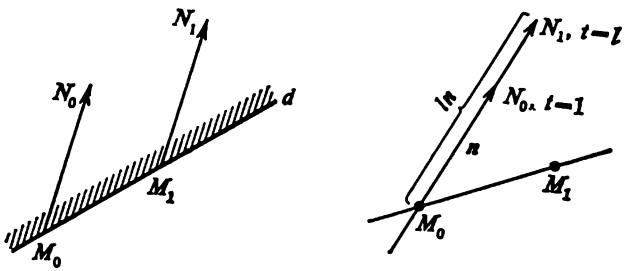
Soit $\mathbf{n}$ un vecteur quelconque non parallèle à d (en particulier, $\mathbf{n} \neq 0$). Fixons un point arbitraire M_0 de d et prenons-le pour origine, i.e. on trouve un point N_0 tel que $\mathbf{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$.

Définition 5. On dit que le côté contenant N_0 *est défini par le vecteur* $\mathbf{n}$ et que le vecteur $\mathbf{n}$ *est dirigé* de ce côté.

On vérifie si la définition est correcte, i.e. on établit l'indépendance du côté contenant N_0 par rapport au choix de M_0. La chose est facile. En effet, soit M_1 un autre point de d tel que $\mathbf{n} = \overrightarrow{M_1N_1}$. Alors

$$\overrightarrow{N_0N_1} = \overrightarrow{N_0M_0} + \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_0M_1},$$

et la droite N_0N_1 est donc parallèle à $d = M_0M_1$. Par conséquent, les points N_0 et N_1 sont situés du même côté de d. □



Côté d'une droite

Soit $\mathbf{a}$ un vecteur directeur de d. Les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{n}$ constituent une base du plan, si bien que tout vecteur $\mathbf{n}_1$ admet la décomposition

$$\mathbf{n}_1 = l_1\mathbf{a} + l\mathbf{n}.$$

Supposons que $\mathbf{n}_1$ n'est pas parallèle à d (donc $l \neq 0$). On constate sans peine que le *vecteur* $\mathbf{n}_1$ *est dirigé du même côté de d que le vecteur* $\mathbf{n}$ *si et seulement si* $l > 0$. En effet, on construit le vecteur $\mathbf{n}_1$ d'origine $M_0 \in d$ et de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ et on voit que son extrémité coïncide avec celle du vecteur $l\mathbf{n}$ d'origine $M_1 \in d$ et de rayon vecteur $\mathbf{r}_0 + l_1\mathbf{a}$. On estime donc, sans restreindre la généralité, que $\mathbf{n}_1 =$

$= l\mathbf{n}$. Dans ce cas, les points N_0 et N_1 tels que $\mathbf{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$ et $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{M_0N_1}$ correspondent sur la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{n}$ aux valeurs $t = 1$ et $t = l$ respectivement du paramètre t, si bien que le segment $\overline{N_0N_1}$ se définit par les inégalités $1 \leqslant t \leqslant l$. D'autre part, le point M_0 de $\mathbf{r}$ (en lequel $\mathbf{r}$ coupe d) correspond à la valeur $t = 0$. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que N_0 et N_1 soient du même côté de la droite d est $l > 0$. □

La droite d est orientée par la donnée du vecteur directeur $\mathbf{a}$ (qui est une base sur la droite), et deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}_1 = k\mathbf{a}$ déterminent une même orientation si et seulement si $k > 0$.

* * *

Soient une orientation de d (par le vecteur directeur $\mathbf{a}$) et un côté de cette droite (défini par $\mathbf{n}$). Alors $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ forment une base du plan. Il est immédiat de vérifier que l'orientation du plan déterminée par le choix de cette base ne dépend pas de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{n}$ et qu'elle est définie par l'orientation donnée et le côté donné de d. En effet, si la donnée des vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{n}_1$ détermine la même orientation et le même côté, alors les résultats ci-dessus entraînent

$$\mathbf{a}_1 = k\mathbf{a},$$
$$\mathbf{n}_1 = l_1\mathbf{a} + l\mathbf{n},$$

où $k > 0$ et $l > 0$, si bien que

$$\begin{vmatrix} k & l_1 \\ 0 & l \end{vmatrix} = kl > 0. \quad \square$$

Ainsi, deux premiers des trois objets suivants:

a) orientation de la droite d,

b) côté de la droite d,

c) orientation du plan,

définissent bien le troisième.

On établit d'ailleurs sans peine que *deux quelconques de ces objets définissent bien le troisième.* Étant donnés une orientation du plan et un côté (resp. orientation) de la droite par le vecteur $\mathbf{n}$ (resp. $\mathbf{a}$), l'orientation (resp. côté) correspondante de la droite est définie par le choix du vecteur $\mathbf{a}$ (resp. $\mathbf{n}$) tel que la base $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ soit directe. Que cette construction soit correcte, on le vérifie par les mêmes formules que plus haut. □

La notion d'orientation du demi-plan permet une autre optique de la question.

Définition 6. *L'orientation du demi-plan* est par définition l'orientation du plan tout entier. On dit d'un vecteur du plan qu'il est *dirigé vers l'intérieur* du demi-plan donné s'il est dirigé de son côté au sens de la définition 5.

Chaque orientation du demi-plan définit l'orientation de la droite qui le limite. Cette dernière orientation est déterminée par le choix d'un vecteur directeur **a** qui, joint à un vecteur **n** quelconque dirigé vers l'intérieur du demi-plan, forme une base directe du plan. On dit qu'elle est *induite* par l'orientation donnée du demi-plan.

Nous nous sommes répété, mais nous verrons en temps et lieu l'intérêt de cette réformulation.

Comme orienter la droite, c'est en fait orienter l'espace vectoriel associé, l'assertion portant sur deux droites parallèles distinctes de même orientation et d'orientations contraires a un sens. On identifie donc les côtés des droites parallèles.

Il est par contre impossible d'identifier les orientations (et les côtés) des droites non parallèles.

* * *

La donnée d'un repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ dans le plan en fixe une orientation (qui n'est rien autre que l'orientation définie par la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$). D'autre part, le fait de donner l'équation

$$Ax + By + C = 0 \tag{8}$$

de la droite en définit un côté, à savoir le côté contenant $M(x, y)$ tels que $Ax + By + C > 0$. Ainsi, la droite se trouve automatiquement orientée dès qu'on a écrit son équation (donc défini le repère).

La multiplication de (8) par un nombre positif conserve l'orientation (et le côté), et la multiplication par un nombre négatif l'inverse.

On voit facilement que le vecteur **n** de coordonnées (A, B) est dirigé du côté positif de la droite (8). En effet, si $\mathbf{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$, $M_0(x_0, y_0)$ étant un point de (8), alors on a pour les coordonnées $x_0 + A$, $y_0 + B$ du point N_0

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = \\ = A^2 + B^2 + (Ax_0 + By_0 + C) = A^2 + B^2 > 0. \quad \square$$

Cette inégalité entraîne que *c'est le vecteur directeur* **a** $(B, -A)$ *qui munit la droite de l'orientation définie par* (8). En effet,

$$\begin{vmatrix} B & A \\ -A & B \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0.$$

On trouve des résultats tout à fait analogues pour les plans dans l'espace.

* * *

Définition 7. On se donne un *côté* d'un plan dans l'espace si l'on fait choix de l'un des deux demi-espaces en lesquels le plan partage l'espace.

On imite le cas de la droite et on démontre que

1) pour tout vecteur **n** non parallèle au plan et tout point M_0 du plan, le côté du plan défini par un point N_0 tel que $\mathbf{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$ ne dépend pas du choix de M_0, i.e. il est défini par **n**; on dit que **n** *est dirigé de ce côté*;

2) un vecteur de la forme $\mathbf{a} + l\mathbf{n}$, avec **a** un vecteur quelconque parallèle au plan, est dirigé du même côté que le vecteur **n** si et seulement si $l > 0$;

3) deux quelconques de trois objets:

a) orientation du plan,

b) côté du plan,

c) orientation de l'espace,

définissent le troisième.

Si l'orientation du plan est par exemple définie par la base **a**, **b** et le côté du plan par le vecteur **n**, alors l'orientation de l'espace est par définition donnée par la base **a**, **b**, **n**. Si

$$\mathbf{a}_1 = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b},$$
$$\mathbf{b}_1 = k_1'\mathbf{a} + k_2'\mathbf{b}$$

est une base de même sens que la base **a**, **b** du plan et

$$\mathbf{n}_1 = l_1\mathbf{a} + l_2\mathbf{b} + l\mathbf{n}$$

est un vecteur dirigé du même côté que **n**, alors les bases **a**, **b**, **n** et $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{n}_1$ sont de même sens parce que le déterminant de la matrice associée au changement de base est

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_1' & l_1 \\ k_2 & k_2' & l_2 \\ 0 & 0 & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & k_1' \\ k_2 & k_2' \end{vmatrix} l,$$

i.e. il est positif car on a par hypothèse

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_1' \\ k_2 & k_2' \end{vmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad l > 0.$$

Par conséquent, l'orientation de l'espace définie par **a**, **b**, **n** l'est de façon correcte.

On procède d'une autre manière en introduisant (d'une manière compréhensible) l'*orientation du demi-espace*. Dans ce cas, chaque orientation du demi-espace *induit* naturellement l'orientation du plan limitant le demi-espace. Celle-ci est définie par la base **a**, **b** qui forme avec un vecteur arbitraire **n** dirigé vers l'intérieur du demi-espace une base directe **a**, **b**, **n** de l'espace.

Le fait de se donner un repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ oriente l'espace. L'équation du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{9}$$

en fixe un côté (tel que $Ax + By + Cz + D > 0$). Aussi elle définit l'orientation du plan. Celle-ci se conserve si (9) est multipliée par un nombre positif, et elle s'inverse si le facteur est négatif.

Comme dans le cas de la droite, le vecteur **n** de coordonnées A, B, C est dirigé du côté positif du plan (2). Quant à l'orientation définie par (9), elle est déterminée par le choix d'un couple arbitraire de vecteurs linéairement indépendants **a** et **b** qui sont parallèles au plan et présentent la propriété

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0, \tag{10}$$

avec a^1, a^2, a^3 et b^1, b^2, b^3 les coordonnées des vecteurs **a** et **b**. (Conformément à la tradition, on a utilisé le déterminant transposé.)

D'ailleurs, il y a intérêt à substituer à **a** et **b** leur produit extérieur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. En effet, la proposition 1 de la leçon 7 entraîne de suite que si $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 = \mathfrak{a}$, alors les bases **a**, **b** et $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ de l'espace vectoriel de dimension 2 défini par le bivecteur $\mathfrak{a}$ sont de même sens. Aussi on définit l'orientation de l'espace vectoriel $\mathcal{T}'$ de dimension 2 par la donnée d'un bivecteur quelconque non nul de $\mathcal{T}' \wedge \mathcal{T}'$. Autrement dit, on se souvient du cas de la droite dont l'orientation n'est rien autre que la classe de ses vecteurs directeurs positivement proportionnels et on dit de l'orientation du plan que c'est la classe de ses bivecteurs directeurs positivement proportionnels.

Selon les formules (12) de la leçon 9, on trouve des vecteurs linéairement indépendants **a** et **b** parallèles au plan (9) pour lesquels les coordonnées du bivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, i.e. les cofacteurs des éléments de la dernière colonne de (10), sont justement les éléments A, B, C de cette colonne. Le déterminant (10) est donc égal à $A^2 + B^2 + C^2$ pour ces vecteurs, i.e. il est positif. Cela démontre que l'orientation définie par l'équation (9) est déterminée par la donnée du bivecteur directeur $\mathfrak{a}$ (A, B, C). □

LEÇON 12

Déformations des bases. — Propriété « être de même sens » des bases qui se déduisent l'une de l'autre par une déformation. — Bases et matrices équivalentes. — Equivalence de la propriété « être déformable » et de la propriété « être de même sens ». — Equivalence des systèmes de vecteurs linéairement indépendants. — Trivecteurs. — Produit d'un trivecteur par un nombre. — Produit extérieur de trois vecteurs.

S'agissant des bases, la relation « être de même sens » (donc la notion d'orientation) se prête à une formulation autre qu'en termes de matrices de passage. Cette formulation utilise certaines définitions générales relatives à la continuité des fonctions vectorielles.

Soit $t \to \mathbf{a}(t)$ une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{T}'$. Pour fixer les idées, on la suppose donnée pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Etant donnée une base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, la fonction $t \to \mathbf{a}(t)$ est définie de façon unique par les coordonnées

$$(1) \qquad a^1(t), \ldots, a^n(t)$$

du vecteur $\mathbf{a}(t)$, qui sont n fonctions numériques.

Définition 1. La fonction $t \to \mathbf{a}(t)$ est dite *continue* s'il en est ainsi de toutes les fonctions (1).

Dans un changement de base, les fonctions (1) sont remplacées par leurs combinaisons linéaires à coefficients constants, si bien que la continuité se conserve. La définition est donc correcte.

Définition 2. On appelle *déformation des bases* de l'espace vectoriel $\mathcal{T}'$ une famille de n fonctions continues

$$(2) \qquad \mathbf{a}_1(t), \ldots, \mathbf{a}_n(t)$$

définies pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ telles que les vecteurs (2) forment pour tout t une base de $\mathcal{T}'$.

Etant données deux bases $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, on dit que $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *est déformable* en $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ s'il existe une déformation

$$\mathbf{a}_1(t), \ldots, \mathbf{a}_n(t),$$

telle que

$$\mathbf{a}_1(0) = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n(0) = \mathbf{a}_n$$

et

$$\mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_n(1) = \mathbf{b}_n.$$

On dit que cette déformation *relie* la première base à la seconde.

Proposition 1. *La relation « être déformable » est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La relation est réflexive parce que les formules

$$\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}_n$$

définissent évidemment pour toute base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ la déformation qui relie cette base à elle-même. Elle est symétrique du moment que pour toute famille $\mathbf{a}_1(t), \ldots, \mathbf{a}_n(t)$ les formules

$$\mathbf{b}_1(t) = \mathbf{a}_1(1-t), \ldots, \mathbf{b}_n(t) = \mathbf{a}_n(1-t)$$

définissent la déformation qui relie la base $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1(1), \ldots, \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n(1)$ à $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(0), \ldots, \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n(0)$. La relation considérée est transitive. En effet, étant données deux déformations $\mathbf{a}_1(t), \ldots, \mathbf{a}_n(t)$ et $\mathbf{b}_1(t), \ldots, \mathbf{b}_n(t)$ quelconques telles que $\mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1(0), \ldots, \mathbf{a}_n(1) = \mathbf{b}_n(0)$, le système

$$\mathbf{c}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{a}_i(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \mathbf{b}_i(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

définit la déformation reliant la base $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(0), \ldots, \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n(0)$ à $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1(1), \ldots, \mathbf{c}_n = \mathbf{b}_n(1)$. □

* * *

On vérifie de suite que *deux bases qui se déduisent l'une de l'autre par une déformation sont de même sens.* En effet, soit $\Delta(t)$ le déterminant de la matrice associée au passage de $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(0), \ldots, \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n(0)$ à $\mathbf{a}_1(t), \ldots, \mathbf{a}_n(t)$. Il est clair que $\Delta(t)$ est une fonction continue de t et que $\Delta(0) = 1$. De plus, $\Delta(t) \neq 0$ quel que soit t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Il est connu en analyse qu'une fonction continue différente de 0 sur un segment garde un signe constant sur ce segment. Aussi $\Delta(1) > 0$ et, partant, les bases $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1(1), \ldots, \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n(1)$ et $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sont de même sens. □

La réciproque est également vraie, et on la démontre facilement pour $n = 1$ (i.e. pour la droite).

Soit $n = 1$, auquel cas les bases sont des familles à un terme qui est un vecteur $\neq 0$. Deux telles bases $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont proportionnelles, i.e. il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{b} = \delta\mathbf{a}$, $\delta > 0$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de même sens. La formule

$$\mathbf{a}(t) = (1 + t(\delta - 1))\,\mathbf{a} \tag{3}$$

définit donc la déformation de $\mathbf{a} = \mathbf{a}(0)$ en $\mathbf{b} = \mathbf{a}(1)$ car la fonction $1 + t(\delta - 1)$ ne s'annule pas pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ si $\delta > 0$.

Ainsi, *pour $n = 1$ deux bases de même sens se déduisent l'une de l'autre par une déformation.* □

Le cas $n > 1$ ne se prête pas à une approche directe, si bien que nous allons introduire des notions qui paraissent de prime abord complètement étrangères à la question traitée.

* * *

Définition 3. Soit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ une base quelconque (ou, de façon plus générale, une famille quelconque de vecteurs). L'opération d'addition d'un vecteur de base et d'un autre vecteur multiplié par un nombre arbitraire k constitue une *transformation élémentaire du type* (1), et l'opération de multiplication d'un vecteur de base par $\lambda \neq 0$ quelconque suivie de la multiplication d'un autre par $\frac{1}{\lambda}$ est par définition une *transformation élémentaire du type* (2).

Voici deux exemples correspondants:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \Rightarrow (\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

et

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \Rightarrow \left(\lambda\mathbf{a}_1, \frac{1}{\lambda}\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right).$$

Lorsque $n = 2$, ce sont exactement les transformations élémentaires au sens de la définition 1 de la leçon 7.

Soit C la matrice de passage de la base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ à $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Si l'on fait subir à la dernière base une transformation élémentaire, cela signifiera pour C qu'une colonne multipliée par k s'ajoute à une autre ou qu'une colonne est multipliée par λ et une autre par $\frac{1}{\lambda}$. Si l'on transforme la base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, ce sont les lignes de C qui changent de façon correspondante pour k et λ modifiés.

Nous dirons que C subit elle aussi des transformations élémentaires (du type (1) et (2) respectivement).

Définition 4. Deux bases (ou deux matrices) sont dites *équivalentes* si on les relie par une chaîne de transformations élémentaires.

Lemme 1. *Toute matrice carrée est équivalente à une matrice diagonale.*

Démonstration. Soit une matrice dont une ligne a deux éléments non nuls c et c'. On ajoute à la colonne avec c' la colonne avec c multipliée par $k = -\frac{c'}{c}$ et on obtient une matrice dont le nombre d'éléments non nuls de la ligne considérée est diminué d'une unité. On répète le procédé, et on a finalement, dans cette ligne, un seul élément non nul, à savoir c. Avec cette technique appliquée à la colonne contenant c, on construit une matrice dont la colonne considérée n'a pas d'élément non nul à part c.

La matrice ainsi construite (et son élément non nul quelconque c_1) est soumise aux mêmes transformations: on annule tous les éléments de la ligne et de la colonne qui se croisent sur c_1 (sauf celui-ci). Il est clair que la ligne et la colonne contenant c ont tous leurs autres éléments nuls.

Au bout d'au plus n pas (n étant l'ordre de la matrice) on obtient une matrice dont toutes les lignes et toutes les colonnes ont chacune

au plus un élément $\neq 0$. Si la matrice de départ est non dégénérée, il existe exactement un élément non nul par ligne et par colonne (car le déterminant d'une matrice ne change pas par les transformations élémentaires, si bien que la matrice reste non dégénérée). En d'autres termes, la matrice définitive s'obtient par permutation des lignes et des colonnes d'une matrice diagonale.

D'autre part, nous avons démontré (voir formule (4) de la leçon 7 ; le fait qu'on avait affaire non aux couples de lignes ou de colonnes d'une matrice, mais aux couples de vecteurs est sans importance) que plusieurs transformations élémentaires permutent deux lignes quelconques (ou deux colonnes quelconques) d'une matrice tout en changeant le signe de l'une d'elles. Cela démontre évidemment le lemme 1. □

Chose à noter, la démonstration a été effectuée avec les seules transformations du type (1).

Lemme 2. *Toute matrice non dégénérée C est équivalente à une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

où $\delta = \det C$.

Démonstration. Selon le lemme 1, la matrice C est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & & & 0 \\ & c_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & c_n \end{pmatrix},$$

où $c_1 c_2 \dots c_n = \det C \neq 0$. (Le déterminant d'une matrice est, on le sait, invariant dans toute transformation élémentaire.) Faisons subir à la dernière matrice $n-1$ transformations du type (2), i.e. on multiplie successivement la première colonne par $c_2, c_3, \dots, c_n$ et on divise les autres par les mêmes nombres. La matrice obtenue est évidemment de la forme voulue. □

Enonçons le lemme 2 en termes de bases.

Lemme 3. *Deux bases quelconques telles que la matrice de passage ait son déterminant égal à δ deviennent par des transformations élémentaires les bases* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ *et* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ *reliées par les égalités*

(4) $$\mathbf{b}_1 = \delta \mathbf{a}_1, \ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2, \ \dots, \ \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n. \ \square$$

* * *

Pour établir un lien avec la déformation des bases, il suffit de dire que *deux bases équivalentes se déduisent l'une de l'autre par une déformation.* En effet, il suffit (par suite de la proposition 1) de prouver cette propriété pour $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ reliées par une transformation élémentaire. Mais si l'on a par exemple

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a} + k\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n,$$

la déformation correspondante se définit par

$$\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{a}_1 + kt\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_2(t) = \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}_n,$$

et si

$$\mathbf{b}_1 = \lambda\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n,$$

$\lambda > 0$, alors on applique à chacun des $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ la déformation décrite pour $n = 1$ (voir (3)). Soit, enfin, $\lambda = -1$. On utilise la déformation définie par

$$\mathbf{a}_1(t) = (\cos \pi t)\,\mathbf{a}_1 - (\sin \pi t)\,\mathbf{a}_2,$$
$$\mathbf{a}_2(t) = (\sin \pi t)\,\mathbf{a}_1 + (\cos \pi t)\,\mathbf{a}_2,$$
$$\mathbf{a}_3(t) = \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}_n. \ \square$$

On peut maintenant démontrer le théorème fondamental suivant.

Théorème 1. *Deux bases sont de même sens si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par une déformation.*

Démonstration. La propriété, pour deux bases mutuellement déformables, d'être de même sens a été démontrée plus haut. En vertu de la remarque ci-dessus et du lemme 3, deux bases quelconques de même sens sont déformables en les bases $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ reliées par (4), où $\delta > 0$. Comme $\delta > 0$, la déformation (3) s'applique aux vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$, d'où le résultat voulu. $\square$

Ainsi, on peut définir les orientations comme étant les classes de bases mutuellement déformables.

* * *

Revenons à la définition 4. Nous avons déjà dit, sans d'ailleurs insister là-dessus, que la notion de transformation élémentaire et, partant, la relation d'équivalence associée ont un sens pour toute famille de vecteurs. Il se trouve néanmoins qu'il y a intérêt à les étudier pour les seules familles libres. Ces familles sont éventuellement non génératrices, si bien qu'on note m le nombre de leurs éléments, la lettre n désignant comme plus haut la dimension de l'espace vectoriel concerné $\mathcal{T}$.

Quand $m = 2$, la définition 4 (pour les vecteurs linéairement indépendants, i.e. les vecteurs non colinéaires) coïncide avec la définition 2 de la leçon 7. Il est donc naturel que dans le cas géné-

ral les classes de familles libres équivalentes de m vecteurs s'appellent les *m-vecteurs*. On met au nombre de m-vecteurs le *m-vecteur nul* qui est par définition l'ensemble des familles liées de m vecteurs.

Avant de formuler la condition d'égalité de deux m-vecteurs (i.e. d'établir l'analogue de la proposition 1 de la leçon 7), on a intérêt à introduire la

Définition 5. Deux familles de vecteurs sont dites *linéairement équivalentes* si chaque vecteur d'une famille s'exprime linéairement au moyen des vecteurs de l'autre, et vice versa.

Deux familles libres linéairement équivalentes ont évidemment un même nombre de termes. Pour ces familles $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ et $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ quelconques, on a les formules

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= c_1^1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_1^m\mathbf{a}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{b}_m &= c_m^1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_m^m\mathbf{a}_m, \end{aligned}$$

dont les coefficients forment la matrice non dégénérée

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \ldots & c_m^1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_1^m & \ldots & c_m^m \end{pmatrix},$$

appelée *matrice de passage* de la famille $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ à la famille $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$.

Si le déterminant de cette matrice $\det C = 1$, les familles $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ et $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ sont dites *unimodulairement équivalentes*.

On vérifie de suite la *validité du lemme* 3 *pour n'importe quelles familles libres linéairement équivalentes de vecteurs*. Ce fait constitue le pivot de la démonstration de la proposition suivante qui devient pour $m = 2$ la proposition 1 de la leçon 7.

Proposition 2. *Deux familles libres de vecteurs sont unimodulairement équivalentes si et seulement s'il y a leur équivalence au sens de la définition* 4 (*on passe de l'une à l'autre par plusieurs transformations élémentaires successives*), *i.e. si elles définissent un même m-vecteur.*

Démonstration. Deux familles libres reliées par une transformation élémentaire sont évidemment équivalentes au sens de $\det = 1$. D'autre part, la relation d'équivalence unimodulaire est transitive (le produit de deux matrices unimodulaires est une matrice unimodulaire), si bien que deux familles équivalentes le sont unimodulairement. Inversement, deux familles unimodulairement équivalentes sont, par le lemme 3, équivalentes à une même famille (car $\delta = 1$), d'où leur équivalence. □

Le cas de bivecteurs a fait l'objet des leçons 7 et 8. Voyons ce qu'il en est de 3-vecteurs (ou trivecteurs).

* * *

On rappelle certaines définitions fondamentales.

La *transformation élémentaire* du triplet (**a**, **b**, **c**) consiste, ou bien à ajouter un vecteur multiplié par k quelconque à un autre, ou bien à faire le produit de deux vecteurs par λ et $\frac{1}{\lambda}$ respectivement.

Deux triplets de vecteurs sont *équivalents* si, ou bien tous les vecteurs sont coplanaires, ou bien l'un triplet devient l'autre au bout d'une succession de transformations élémentaires.

Les classes de triplets équivalents s'appellent les *trivecteurs*.

On note $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ le trivecteur défini par le triplet (**a**, **b**, **c**).

Un trivecteur formé de triplet de vecteurs coplanaires est dit *nul*. On le note 0. Ainsi, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$ *si et seulement si* **a**, **b** *et* **c** *sont coplanaires*.

La proposition 2 s'énonce maintenant d'une façon complètement analogue à la proposition 1 de la leçon 7.

Proposition 3. *Si* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \neq 0$, *l'égalité*

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$

a lieu si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b} + m_1\mathbf{c}, \\ \mathbf{b}_1 &= k_2\mathbf{a} + l_2\mathbf{b} + m_2\mathbf{c}, \\ \mathbf{c}_1 &= k_3\mathbf{a} + l_3\mathbf{b} + m_3\mathbf{c}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m & m_3 \end{vmatrix} = 1. \quad \square$$

Par analogie avec les bivecteurs (et les vecteurs), on devrait se faire une idée intuitive des trivecteurs comme des corps orientés de volume donné « plongés » dans l'espace. Montrons qu'il en est bien ainsi.

Seul le volume nous intéresse, si bien qu'on se borne aux parallélépipèdes, i.e. aux triplets de vecteurs (non coplanaires). On admet que deux triplets définissent un même « trivecteur géométrique » si

a) les parallélépipèdes construits sur ces triplets ont même volume ;

b) ces triplets sont de même orientation.

Il est clair que les transformations élémentaires conservent le volume du parallélépipède construit sur **a**, **b**, **c** (la propriété est évidente pour (2), et les transformations du type (1) conservant l'aire de la base et la longueur de la hauteur du parallélépipède la possèdent également) et l'orientation du triplet (**a**, **b**, **c**) (car le déterminant de la matrice de passage de (**a**, **b**, **c**) au triplet équiva-

lent est 1, donc positif). Aussi deux triplets qui sont « algébriquement » équivalents, le sont « géométriquement ».

Inversement, soient donnés deux triplets de vecteurs non coplanaires tels qu'on soit dans les conditions a) et b). Comme nous nous sommes placés dans un espace « géométrique » de dimension 3, les deux triplets constituent des bases qu'on peut traiter par le lemme 3. Selon ce lemme, ces triplets sont équivalents (« du point de vue algébrique », ce qui équivaut à dire, on le sait, « du point de vue géométrique ») aux triplets de la forme (**a**, **b**, **c**) et (δ**a**, **b**, **c**) qui vérifient donc les conditions mentionnées. S'agissant de ces triplets, la chose n'est évidemment possible que pour $\delta = 1$. Par conséquent, il y a équivalence « algébrique » des triplets de départ (l'un devient l'autre par transformations élémentaires). □

* * *

La proposition 3 entraîne de suite que pour tout trivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \neq 0$ et tout nombre $k \neq 0$, on a les égalités

$$k\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge k\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge k\mathbf{c} \tag{5}$$

et que si $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, alors

$$k\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c}_1 = k\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.$$

On a de plus les deux propositions pour $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$ ou $k = 0$.

Ce résultat justifie la

Définition 6. Le trivecteur (5) est par définition le *produit* du trivecteur $\mathfrak{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ par le nombre k. La notation est $k\mathfrak{A}$.

Ainsi, on a par définition

$$k\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = k\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge k\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge k\mathbf{c}.$$

Les deux symboles $\wedge$ dans $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ sont inséparables. Ils désignent ensemble une seule opération (qu'on appelle *multiplication extérieure* par analogie avec le cas des bivecteurs) qui associe aux vecteurs **a**, **b**, **c** le trivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

On « scinde » d'ailleurs ce symbole en introduisant l'opération de multiplication extérieure d'un bivecteur par un vecteur.

Définition 7. On appelle *produit extérieur* du bivecteur $\alpha = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ par le vecteur **c**, et on note $\alpha \wedge \mathbf{c}$, le trivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Ainsi,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$

par définition. On définit de même le produit extérieur d'un vecteur par un bivecteur:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.$$

Il en résulte que le produit extérieur de trois vecteurs est associatif:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}).$$

On vérifie bien sûr si la définition 7 est correcte.

Soit $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1$, i.e. (voir proposition 1 de la leçon 7; il suffit de prendre le cas $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$) soit

$$\mathbf{a}_1 = k\mathbf{a} + l\mathbf{b},$$
$$\mathbf{b}_1 = k_1\mathbf{a} + l_1\mathbf{b},$$

où

$$\begin{vmatrix} k & k_1 \\ l & l_1 \end{vmatrix} = 1.$$

Alors

$$\begin{vmatrix} k & k_1 & 0 \\ l & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donc

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.$$

On démontre de même que si $\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c}_1 = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, alors $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \wedge \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. □

On démontre sans peine que le trivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ change de signe par permutation de deux de ses vecteurs (*anticommutativité*). Par exemple

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{c} = (-\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.$$

LEÇON 13

Trivecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3.— Addition des trivecteurs.— Formule du volume d'un parallélépipède.— Produit scalaire.— Axiomes de la multiplication scalaire.— Espaces euclidiens.— Longueur d'un vecteur et angle de deux vecteurs.— Inégalité de Cauchy-Bouniakovski.— Inégalité du triangle. — Théorème des diagonales d'un parallélogramme.— Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore.

Dans la leçon précédente, la dimension n de l'espace vectoriel $\mathscr{V}$ était indifférente en théorie des trivecteurs. Il n'en va pas de même de l'opération d'addition qui exige que $n \leqslant 4$ (s'agissant des bivecteurs, il nous a bien fallu supposer $n \leqslant 3$). Selon les conventions admises, on passe outre au cas $n = 4$ et on se borne à $n \leqslant 3$.

On sait que tout triplet de vecteurs est linéairement dépendant pour $n \leqslant 2$, i.e. avec $n \leqslant 2$, on ne trouve autre trivecteur que le trivecteur nul. (De même, il n'existe pour $n \leqslant 3$ aucun m-vecteur, $m > 3$, non nul.) Seul le cas « spatial » $n = 3$ a donc un intérêt.

Si deux bases $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ d'un espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension 3 sont liées par les relations

$$\mathbf{a}_1 = \delta\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}, \tag{1}$$

on a (voir définition 6 de la leçon 12)

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c}_1 = \delta(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}). \tag{2}$$

D'autre part, deux bases quelconques de $\mathscr{V}$ sont équivalentes, selon le lemme 3 de la leçon 12, aux bases liées par (1), δ étant égal au déterminant de la matrice de passage correspondante. C'est pourquoi la formule (2) est vraie pour n'importe quelles bases (triplets de vecteurs non coplanaires) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ de $\mathscr{V}$.

Il y a plus. La formule est évidemment juste pour $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ coplanaires.

Ainsi, on dit (en changeant les notations) que *toute base* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *de l'espace vectoriel* $\mathscr{V}$ *et trois vecteurs* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *quelconques satisfont à la formule*

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3), \tag{3}$$

avec a^1, a^2, a^3, b^1, b^2, b^3, c^1, c^2, c^3 les coordonnées des vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (cf. formule (6), leçon 8).

Cela signifie en particulier qu'étant donné un trivecteur $\mathfrak{A}_0 \neq 0$ quelconque, tout autre trivecteur $\mathfrak{A}$ s'écrit

$$\mathfrak{A} = k\mathfrak{A}_0,$$

avec k un nombre (qui est évidemment défini de façon unique).

* * *

Définition 1. On appelle *somme* de deux trivecteurs $\mathfrak{A} = k\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{B} = l\mathfrak{A}_0$ le trivecteur

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (k + l)\,\mathfrak{A}_0.$$

Si $\mathfrak{A}'_0 = \lambda\mathfrak{A}_0$, où $\lambda \neq 0$, alors $\mathfrak{A} = \frac{k}{\lambda}\,\mathfrak{A}'_0$ et $\mathfrak{B} = \frac{l}{\lambda}\,\mathfrak{A}'_0$. La définition est correcte parce que le trivecteur $\left(\frac{k}{\lambda}+\frac{l}{\lambda}\right)\mathfrak{A}'_0$ est évidemment égal au trivecteur $(k + l)\,\mathfrak{A}_0$.

On montre de suite que l'ensemble $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ des trivecteurs est un espace vectoriel de dimension 1 pour les opérations introduites (addition et multiplication par un nombre).

Géométriquement, il est clair que si le volume du trivecteur $\mathfrak{A}_0$ est 1, alors le volume de $k\mathfrak{A}_0$, $k \neq 0$, vaut $|k|$. Si le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ est 1, celui d'un parallélépipède $OABC$ quelconque est donc égal, conformément à (3), à la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

dont les lignes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

En théorie axiomatique formelle, on choisit un trivecteur $\mathfrak{A}_0 \neq 0$ et on détermine le volume de $OABC$ quelconque en tant que valeur absolue d'un nombre k tel que

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = k\mathfrak{A}_0.$$

Le nombre k est le *volume orienté* du parallélépipède concerné.

* * *

Sur ce, nous quittons momentanément la géométrie affine et nous nous proposerons de compléter les axiomes affines 1° à 11° de façon à obtenir la géométrie euclidienne connue dès l'école secondaire et munie de ses mesures des segments et des angles.

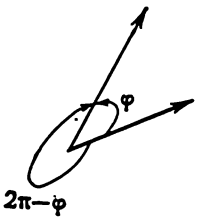
Il est dans notre tradition de commencer par une approche intuitive.

Soient **a** et **b** deux vecteurs (« géométriques »). On les suppose non nuls et on trouve l'angle entre **a** et **b**. Cet angle a deux valeurs φ et $2\pi - \varphi$ dont le cosinus est le même. Aussi, la formule

$$\mathbf{ab} = ab \cos \varphi, \tag{4}$$

où a et b sont les longueurs des vecteurs **a** et **b** respectivement, définit univoquement un nombre **ab**.

Définition 2. Le nombre **ab** défini par la formule (4) est le *produit scalaire* des vecteurs **a** et **b**. Si ou bien $\mathbf{a} = 0$, ou bien $\mathbf{b} = 0$, alors $\mathbf{ab} = 0$ par définition. L'opération $\mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{ab}$ porte le nom de *multiplication scalaire*.



Angle de deux vecteurs

Il est clair que pour tout couple de vecteurs **a** et **b** la multiplication scalaire est *commutative*:

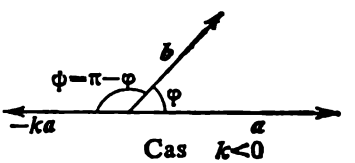
$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

On constate sans peine son *homogénéité*, i.e.

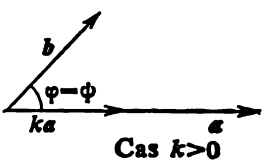
$$k\,(\mathbf{ab}) = (k\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,(k\mathbf{b}) \tag{5}$$

quels que soient les vecteurs **a**, **b** et le nombre k. En effet, la formule (5) est évidente si ou bien $\mathbf{a} = 0$, ou bien $\mathbf{b} = 0$, et $k = 0$. Pour $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$, $k \neq 0$, la longueur du vecteur $k\mathbf{a}$ est $|k|a$, et l'angle ψ formé par $k\mathbf{a}$ et **b** est égal à l'angle φ fait par **a** et **b** ($k > 0$) et à $\pi - \varphi$ pour $k < 0$. Donc $k \cos \varphi = |k| \cos \psi$ et, partant,

$$(k\mathbf{a})\,\mathbf{b} = (|k|\,a)\,b \cos \psi = ab\,(|k| \cos \psi) = abk \cos \varphi = k\,(ab \cos \varphi) = k\,(\mathbf{ab}).$$



Cas $k<0$



Cas $k>0$

On démontre de même l'égalité $\mathbf{a}\,(k\mathbf{b}) = k\,(\mathbf{ab})$ (on utilise également la propriété commutative). □

Le produit scalaire sert à exprimer les longueurs aussi bien que les angles. En effet, $\varphi = 0$ pour $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, si bien que la longueur a de tout vecteur **a** est définie par

$$a = \sqrt{\mathbf{a}^2},$$

où $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa}$ (« le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa longueur »), et l'angle φ de deux vecteurs non nuls par

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}\sqrt{\mathbf{b}^2}}.$$

En particulier, $\mathbf{a}^2 \geqslant 0$ *pour tout vecteur* $\mathbf{a}$, *et* $\mathbf{a}^2 = 0$ *si et seulement si* $\mathbf{a} = 0$.

Cette propriété de la multiplication scalaire porte le nom de *positivité*.

On connaît en trigonométrie le théorème des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

qui s'écrit sous forme vectorielle

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}$$

juste pour $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ quelconques.

On fait $\mathbf{b} = -\mathbf{b}$, il vient, compte tenu de $(-\mathbf{a})\,\mathbf{b} = -\mathbf{ab}$,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab},$$

qui entraîne pour tout triplet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = (\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}))^2 = \mathbf{a}^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + 2\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) =$$
$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{bc} + 2\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + \mathbf{c}^2 + 2\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} =$$
$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{ab} + 2\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c},$$

donc

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ab} - \mathbf{bc}.$$

On fait la somme après avoir substitué $-\mathbf{c}$ à $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a}\,(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 2\mathbf{ab}.$$

On applique la dernière formule à $\mathbf{a}$, à $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ (qui remplace $\mathbf{b}$) et à $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2}$ (au lieu de $\mathbf{c}$) tels que

$$\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2} = \mathbf{b}, \qquad \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2} = \mathbf{c}$$

et

$$2\mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right) = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

et on aboutit au résultat

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac},$$

i.e. la multiplication scalaire est *distributive* par rapport à l'addition (ce qui justifie le nom de multiplication donnée l'opération $\mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{ab}$).

* * *

En théorie axiomatique, on effectue nécessairement un « renversement » et on accepte les résultats obtenus en qualité d'axiomes.

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel arbitraire (sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels).

Définition 3. On définit sur $\mathcal{V}$ l'opération de *multiplication scalaire* qui est une fonction $\mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{ab}$ quelconque de deux vecteurs à valeurs numériques ayant les propriétés suivantes (les axiomes sont numérotés de façon continue):

12° Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ quelconques, on a

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

(*distributivité*).

13° Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ quelconques et tout nombre k, on a

$$k(\mathbf{ab}) = (k\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(k\mathbf{b})$$

(*homogénéité*).

14° Pour tout couple de vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$, on a

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

(*commutativité*).

15° Pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ non nul, on a

$$\mathbf{a}^2 > 0$$

(*positivité*).

Le nombre $\mathbf{ab}$ s'appelle produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Remarque. La notation $\mathbf{ab}$ n'est pas commode quand $\mathcal{V}$ est par exemple un espace fonctionnel. On emploie donc de préférence la notation $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Il faut s'y faire.

* * *

Définition 4. Un espace vectoriel $\mathcal{V}$ muni d'une multiplication scalaire $\mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto \mathbf{ab}$ s'appelle *espace vectoriel euclidien*. (Certains auteurs disent « espace à produit scalaire » tout court).

On appelle *espace (ponctuel) euclidien* un espace affine $\mathcal{A}$ tel que l'espace vectoriel associé soit un espace vectoriel euclidien (i.e. un espace muni d'un produit scalaire).

Les espaces euclidiens font l'objet de la *géométrie euclidienne* qui a une notion première (multiplication scalaire) de plus que la géométrie affine et les axiomes supplémentaires 12° à 15°.

* * *

Dans l'espace vectoriel euclidien, la *longueur d'un vecteur* $\mathbf{a}$ se note $|\mathbf{a}|$ (on rencontre également la notation $\|\mathbf{a}\|$) et *se définit* par la formule

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} \tag{6}$$

(ou encore $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$), et l'*angle* φ de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ non nuls par

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}. \tag{7}$$

formule donnant deux valeurs de φ (dont la somme est 2π).

Dans l'espace ponctuel euclidien, la *distance* de deux points M_0 et M_1 se note $|M_0M_1|$ et *se définit* par

$$|M_0M_1| = |\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{\overrightarrow{M_0M}^2}$$

et l'angle φ de deux droites par la formule (7), avec **a**, **b** des vecteurs directeurs quelconques des droites. (Cette formule fournit *quatre* valeurs de φ selon **a** et **b** choisis et *deux* valeurs dans la condition $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.)

L'axiome de la positivité 15° fait que pour tout **a** la formule (6) définit bien $|\mathbf{a}|$ qui est un nombre réel non négatif. Ceci étant, $|\mathbf{a}| > 0$ si $\mathbf{a} \neq 0$, et $|\mathbf{a}| = 0$ dans le cas contraire (le dernier résultat tient à l'axiome de l'homogénéité 13° pour $k = 0$).

* * *

S'agissant de la formule (7), on se heurte à des difficultés. En effet, on a à démontrer que son second membre appartient au domaine de définition de arc cos, i.e. que

$$|\mathbf{ab}| \leqslant |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|,$$

ou encore

$$(\mathbf{ab})^2 \leqslant \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2. \tag{8}$$

Cette inégalité (dite *de Cauchy-Bouniakovski*) se démontre à l aide de la fonction

$$f(t) = (\mathbf{a} + t\mathbf{b})^2$$

de la variable numérique t. Selon l'axiome 15°, tout t vérifie $f(t) \geqslant 0$. D'autre part,

$$f(t) = \mathbf{a}^2 + 2t(\mathbf{ab}) + t^2\mathbf{b}^2,$$

et on démontre en algèbre élémentaire que si un trinôme de degré 2 ne prend que des valeurs non négatives, alors son discriminant (expression sous radical dans la formule des racines d'une équation de degré 2) est non positif. Dans notre cas, le discriminant est égal à $(\mathbf{ab})^2 - \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$, ce qui démontre (8). □

Si **a** et **b** sont colinéaires, (8) devient l'égalité stricte. Inversement si $(\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$ et $\mathbf{b} \neq 0$, alors $f(t_0) = 0$, $t_0 = -\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{b}^2}$, par la formule des racines d'une équation de degré 2. Donc $\mathbf{a} + t_0\mathbf{b} = 0$. Ainsi, *l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski devient une égalité seulement pour* **a** *et* **b** *colinéaires.* □

Cela signifie pour $\mathbf{a} \neq 0$ et $\mathbf{b} \neq 0$ que *l'angle* φ *de deux vecteurs non colinéaires est* $\neq 0$ *et* $\neq \pi$ et que s'il y a colinéarité, il est égal, ou bien à 0 (cas où la proportion des vecteurs est positive), ou bien à π (cas contraire).

* * *

L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski entraîne

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{a}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

et, de même,

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 \geqslant$$
$$\geqslant |\mathbf{a}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|)^2,$$

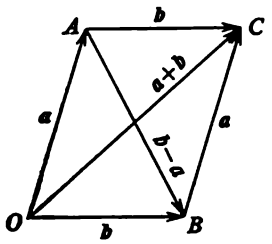
d'où

$$(9) \qquad \big|\,|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\,\big| \leqslant |\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Etant donné un triangle arbitraire ABC et $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, on a $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ et (9) donne lieu aux inégalités connues

$$\big|\,|AB| - |BC|\,\big| \leqslant |AC| \leqslant |AB| + |BC|$$

(« dans un triangle un côté quelconque est au plus égal à la somme des deux autres et au moins égal à leur différence »). On comprend donc pourquoi on donne à (9) le nom d'*inégalité du triangle*.



* * *

La multiplication scalaire sert d'outil efficace dans la démonstration des théorèmes géométriques. On a vu par exemple que le théorème des cosinus n'est en fait rien autre que la formule du carré d'une somme. Citons un autre exemple.

Soit $OACB$ un parallélogramme quelconque. On pose $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, il vient $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ et $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$. Donc

$$|OC|^2 + |AB|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{b}-\mathbf{a})^2 =$$
$$= 2\,(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) = 2\,(|OA|^2 + |OB|^2) =$$
$$= |OA|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 + |OB|^2,$$

i.e. *la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.*

* * *

Définition 5. Deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire $\mathbf{ab}$ est nul:

$$\mathbf{ab} = 0.$$

Lorsque $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$, cela équivaut à dire que **a** et **b** forment un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.

Etant donnés **a** et **b** orthogonaux, on a

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2. \tag{10}$$

Si $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, on a donc le théorème de Pythagore

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$$

(« le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés »), si bien que l'égalité (10) est également appelée *théorème de Pythagore.*

LEÇON 14

Forme métrique et coefficients métriques.— Condition de définie positivité.— Formules de transformation des coefficients métriques dans un changement de base.— Familles orthonormées de vecteurs et coefficients de Fourier.— Bases orthonormées et coordonnées rectangulaires.— Décomposition des matrices définies positives.— Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.— Isomorphisme d'espaces euclidiens.— Matrices orthogonales.— Matrices orthogonales d'ordre 2.— Formules de transformation des coordonnées rectangulaires.

Etablissons les formules en coordonnées du produit scalaire.

Soit $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une base quelconque de l'espace vectoriel euclidien $\mathscr{V}$ et soient

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i,$$
$$\mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + \ldots + y^n\mathbf{e}_n = y^j\mathbf{e}_j$$

deux vecteurs arbitraires de $\mathscr{V}$.

Avec la convention d'Einstein,

$$\mathbf{xy} = (x^i\mathbf{e}_i)\,(y^j\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\,x^iy^j,$$

i.e.

$$\mathbf{xy} = g_{ij}x^iy^j, \tag{1}$$

avec

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

On note que

$$g_{ij} = g_{ji} \text{ quels que soient } i, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Si $n = 1$, la formule (1) s'écrit

$$\mathbf{xy} = g_{11}x^1y^1,$$

où $g_{11} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$;

pour $n = 2$, on a

$$\mathbf{xy} = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + g_{21}x^2y^1 + g_{22}x^2y^2 =$$
$$= g_{11}x^1y^1 + g_{12}\,(x^1y^2 + x^2y^1) + g_{22}x^2y^2,$$

avec

$$g_{11} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1,$$
$$g_{12} = g_{21} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$
$$g_{22} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2;$$

pour $n = 3$,

$$\begin{aligned}\mathbf{xy} &= g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + g_{13}x^1y^3 + g_{21}x^2y^1 + g_{22}x^2y^2 + \\ &\quad + g_{23}x^2y^3 + g_{31}x^3y^1 + g_{32}x^3y^2 + g_{33}x^3y^3 = \\ &= g_{11}x^1y^1 + g_{12}(x^1y^2 + x^2y^1) + g_{13}(x^1y^3 + x^3y^1) + \\ &\quad + g_{22}x^2y^2 + g_{23}(x^2y^3 + x^3y^2) + g_{33}x^3y^3,\end{aligned}$$

où

$$g_{11} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \quad g_{12} = g_{21} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad g_{13} = g_{31} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,$$
$$g_{22} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad g_{23} = g_{32} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad g_{33} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Dans le cas général, on réduit les termes « semblables »:

$$\mathbf{xy} = \sum_i g_{ii}x^iy^i + \sum_{i<j} g_{ij}(x^iy^j + x^jy^i).$$

La première sommation est faite en i de 1 à n et la seconde en i et j de 1 à n, $i < j$.

On peut écrire (1) en notations matricielles. Soit, comme dans la leçon 11,

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

et soit G la matrice carrée d'ordre n

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Considérons la matrice $x^\top Gy$, où $y^\top = (y^1, \ldots, y^n)$ (le symbole $^\top$ désigne la transposition). Conformément à la règle de multiplication des matrices rectangulaires, cette matrice est 1×1, i.e. c'est un nombre. Il est immédiat de le calculer:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}x^iy^j, \tag{5}$$

i.e. ce nombre vaut (1). Ainsi,

$$\mathbf{xy} = x^\top Gy. \tag{6}$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, on a

$$\mathbf{x}^2 = g_{ij}x^ix^j = \sum_i g_{ii}(x^i)^2 + 2\sum_{i<j} g_{ij}x^ix^j = x^\top Gx \tag{7}$$

et, en particulier,

$$\mathbf{x}^2 = g_{11}(x^1)^2$$

pour $n = 1$;

$$x^2 = g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + g_{22}(x^2)^2$$

pour $n = 2$;

$$x^2 = g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{13}x^1x^3 + g_{22}(x^2)^2 + \\ + 2g_{23}x^2x^3 + g_{33}(x^3)^2$$

pour $n = 3$.

Le second membre de (1) est une expression algébrique ((5) en est une écriture moins conventionnelle) qui constitue un polynôme homogène par rapport à deux ensembles d'indéterminées $x^1, \ldots, x^n$ et $y^1, \ldots, y^n$ et linéaire en chaque ensemble. Les polynômes homogènes s'appellent en général les *formes*, si bien que (5) est une *forme bilinéaire*. Les formes (5) à coefficients jouissant de la propriété (3) sont dites *symétriques*.

Lorsque $y^1 = x^1, \ldots, y^n = x^n$, la forme bilinéaire symétrique devient (voir (7)) un polynôme homogène de degré 2 en les indéterminées $x^1, \ldots, x^n$, i.e. une *forme quadratique*. Il est clair que la forme quadratique définit bien la forme bilinéaire symétrique associée (i.e. les coefficients g_{ij}). Selon l'axiome 15°, la forme (7) est telle que

$$g_{ij}x^ix^j > 0$$

dès que $(x^1, \ldots, x^n) \neq (0, \ldots, 0)$. Ces formes quadratiques (et les formes bilinéaires symétriques associées) sont dites *définies positives*.

Ainsi, la formule (1) (ainsi que la formule équivalente (6)) s'énonce en termes de formes: *le produit scalaire de deux vecteurs est une forme bilinéaire symétrique définie positive de leurs coordonnées.*

La réciproque est également vraie, à savoir on a la

Proposition 1. *Soient $\mathcal{V}$ un espace vectoriel quelconque, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une base de $\mathcal{V}$ et $g_{ij}x^iy^j$ une forme bilinéaire symétrique définie positive quelconque en $x^1, \ldots, x^n$ et $y^1, \ldots, y^n$. La formule (1) définit dans $\mathcal{V}$ un produit scalaire.*

Démonstration. Les propriétés de distributivité et d'homogénéité (axiomes 12°, 13°) découlent de l'hypothèse de forme bilinéaire:

$$g_{ij}(x_1^i + x_2^i)y^j = g_{ij}x_1^iy^j + g_{ij}x_2^iy^j,$$

$$g_{ij}(kx^i)y^j = g_{ij}x^i(ky^j) = kg_{ij}x^iy^j.$$

La commutativité (axiome 14°) résulte de la propriété de symétrie

$$g_{ij}y^ix^j = g_{ji}y^ix^j = g_{ji}x^jy^i = g_{ij}x^iy^j.$$

On désigne ici l'indice de sommation par toute lettre non utilisée, à savoir

$$\begin{aligned} g_{ji}x^jy^i &= g_{\alpha i}x^\alpha y^i \quad \text{(on remplace } j \text{ par } \alpha\text{)}, \\ &= g_{\alpha j}x^\alpha y^j \quad (j \text{ disponible est substitué à } i), \\ &= g_{ij}x^iy^j \quad (i \text{ disponible remplace } \alpha). \end{aligned}$$

Enfin, la positivité (axiome 15°) est garantie par définition par la définie positivité de la forme $g_{ij}x^iy^j$. □

Ainsi, on définit dans un même espace vectoriel plusieurs opérations de multiplication scalaire, i.e. on le transforme par divers procédés en l'espace euclidien.

Définition 1. La forme $g_{ij}x^iy^j$ (et la forme quadratique associée $g_{ij}x^ix^j$) est la *forme métrique* de la base donnée $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, et ses coefficients g_{ij} en sont les *coefficients métriques*.

* * *

La condition de définie positivité impose certaines restrictions à g_{ij}. Il est clair par exemple que

$$g_{ii} > 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Lorsque $n = 1$, i.e. on a un seul coefficient g_{11}, la condition $g_{11} > 0$ est non seulement nécessaire, mais évidemment suffisante pour que la forme soit définie positive.

Soit $n = 2$ et $g_{11} > 0$. Alors

$$g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + g_{22}(x^2)^2 = \\ = \left(\sqrt{g_{11}}\,x^1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}x^2\right)^2 + \frac{g_{22}g_{11} - g_{12}^2}{g_{11}}(x^2)^2,$$

et la forme est définie positive si et seulement si $g_{22}g_{11} - g_{12}^2 > 0$. Ainsi, *la matrice symétrique*

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{12} = g_{21},$$

est la matrice des coefficients métriques d'une base de l'espace vectoriel euclidien de dimension 2 sous la condition nécessaire et suffisante

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Dans le cas $n = 3$, ces conditions s'écrivent

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0$$

(on le démontrera au cours du semestre suivant).

* * *

Par construction la forme métrique dépend de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Voyons donc les transformations correspondantes dans un changement de base (on emploiera les notations matricielles).

Soient $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ deux bases,

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}$$

les matrices uni-colonnes des coordonnées d'un même vecteur $\mathbf{x}$ dans ces bases, $C = (c^i_{i'})$ la matrice de passage de la première base à la seconde et $G = (g_{ij})$ la matrice des coefficients métriques de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. On a

$$x = Cx' \text{ et } \mathbf{x}^2 = x^{\mathsf{T}} G x.$$

Donc

$$\mathbf{x}^2 = (x'^{\mathsf{T}} C^{\mathsf{T}})\, G\, (Cx') = x'^{\mathsf{T}}\, (C^{\mathsf{T}} G C)\, x',$$

i.e. la matrice $G' = (g_{i'j'})$ des coefficients métriques de la base $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ s'exprime par

$$G' = C^{\mathsf{T}} G C. \tag{8}$$

Autrement dit,

$$g_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}. \tag{9}$$

Définition 2. Une famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ de vecteurs d'un espace euclidien est dite *orthonormée* si

a) tout vecteur est de longueur 1 ;

b) les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux, i.e.

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Définition 3. Les *coefficients de Fourier* d'un vecteur $\mathbf{x}$ par rapport à la famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ sont par définition les produits scalaires $x_1 = \mathbf{x}\mathbf{e}_1, \ldots, x_m = \mathbf{x}\mathbf{e}_m$.

Le vecteur nul a tous ses coefficients de Fourier égaux à 0, mais la réciproque n'est en général pas vraie. Si $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$ entraîne $\mathbf{x} = 0$, la famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ est dite *fermée*.

Proposition 2 (inégalité de Bessel). *Etant donnée une famille* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ *orthonormée, on a pour tout vecteur* $\mathbf{x}$

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2,$$

le vecteur $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - x_1\mathbf{e}_1 - \ldots - x_m\mathbf{e}_m$ *étant orthogonal à tous les vecteurs* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ *(i.e. tous ses coefficients de Fourier par rapport à la famille* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ *sont nuls).*

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$0 \leqslant |\mathbf{x}'|^2 = \mathbf{x}'^2 = (\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{e}_i)(\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbf{e}_j) =$$

$$= \mathbf{x}^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i (\mathbf{x}\mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) =$$

$$= \mathbf{x}^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \mathbf{x}^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

et que

$$\mathbf{e}_i (\mathbf{x} - x_1\mathbf{e}_1 - \ldots - x_m\mathbf{e}_m) = \mathbf{e}_i\mathbf{x} - x_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = x_i - x_i = 0$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$. □

On rappelle qu'une famille de vecteurs (non nécessairement orthonormée) est génératrice si tout vecteur de l'espace en est combinaison linéaire.

Définition 4. Une famille de vecteurs orthonormée est dite *maximale* si elle cesse d'être orthonormée par adjonction d'un vecteur arbitraire.

Proposition 3. *Les propriétés suivantes d'une famille orthonormée* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *sont équivalentes*:

1) *la famille est maximale*;
2) *la famille est fermée*;
3) *la famille est génératrice*;
4) *pour tout vecteur* $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

avec $x_1, \ldots, x_n$ *les coefficients de Fourier de* $\mathbf{x}$;

5) *pour tout couple de vecteurs* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n; \tag{10}$$

6) *pour tout vecteur* $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

i.e. l'inégalité de Bessel a lieu avec le signe égal.

Démonstration.

1) ⇒ 2). Si l'on a $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ pour un vecteur $\mathbf{x} \neq 0$, alors la famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ s'avère orthonormée.

2) ⇒ 3). Si $\mathbf{x}$ ne s'exprime pas linéairement par $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, le vecteur $\mathbf{x}'$ de la proposition 2 est non nul et a tous ses coefficients de Fourier égaux à 0.

3) ⇒ 4). Si $\mathbf{x} = k_1\mathbf{e}_1 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n$, alors

$$x_i = \mathbf{x}\mathbf{e}_i = k_i (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i) = k_i.$$

4) $\Rightarrow$ 5). Si $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$, on a

$$\mathbf{xy} = (\sum_i x_i \mathbf{e}_i)(\sum_j y_j \mathbf{e}_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \sum_i x_i y_i.$$

5) $\Rightarrow$ 6). Il suffit de faire $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dans (10).

6) $\Rightarrow$ 1). Si la famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{x}$ restait orthonormée, on aurait

$$1 = \mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0,$$

car le vecteur $\mathbf{x}$ étant orthogonal à $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ aurait tous ses coefficients de Fourier $x_1, \ldots, x_n$ nuls. □

L'égalité (10) s'appelle l'*égalité de Parseval*.

Remarque. Le résultat $x_i = k_i$ (voir 3) $\Rightarrow$ 4)) est obtenu moyennant la seule propriété d'orthonormalité de la famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Il s'applique à tout vecteur de la forme $\mathbf{x} = k_1\mathbf{e}_1 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n$ sans aucune hypothèse supplémentaire sur cette famille. Mais $x_i = 0$, donc $k_i = 0$ pour $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, i.e. *toute famille orthonormée de vecteurs est libre.*

* * *

Définition 5. Si une famille orthonormée de vecteurs constitue une base, on dit que cette base est *orthonormée*.

Aux termes de la proposition 3, une famille orthonormée est une base si et seulement si elle est, ou bien maximale, ou bien fermée, ou bien génératrice (ou encore formée de n vecteurs, $n = \dim \mathcal{T}$). Ceci étant, tout vecteur a pour coordonnées dans la base orthonormée ses coefficients de Fourier (4) de la proposition 3).

Dans la suite de l'exposé, nous omettrons donc de parler des coefficients de Fourier en rapport avec les bases orthonormées tout en désignant par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées dans une telle base.

Les vecteurs d'une base orthonormée seront désignés de règle par $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$ pour $n = 2$ et $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ pour $n = 3$).

Définition 6. Le repère $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ dans l'espace euclidien ponctuel relativement à $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ orthonormée est dit *rectangulaire* (ou *euclidien*, ou encore *cartésien*). Les coordonnées sont *rectangulaires*, *euclidiennes* ou *cartésiennes* respectivement. La terminologie est la même dans le cas de l'espace vectoriel euclidien.

Une base orthonormée est caractérisée par le fait que la matrice G de ses coefficients métriques est la matrice unité E. En coordonnées rectangulaires, toutes les formules métriques se simplifient donc sensiblement :

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

$$|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

($x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du point A, $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées de B), et ainsi de suite.

On conçoit qu'on traite d'habitude les espaces euclidiens en termes de coordonnées rectangulaires.

L'existence (pour $\dim \mathscr{V} > 0$) de bases orthonormées et de coordonnées rectangulaires découle de suite de la proposition 3. En effet, soit $\mathbf{a}$ un vecteur non nul quelconque. On le multiplie par $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$ et on obtient le vecteur $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ de longueur unité (de tels vecteurs sont dits *unitaires*), i.e. une famille orthonormée à un élément. L'existence de familles orthonormées se trouve démontrée. Comme toute famille orthonormée est formée de $n = \dim \mathscr{V}$ vecteurs au plus (car elle est libre), il existe des familles orthonormées maximales, i.e. des bases.

* * *

Chose curieuse, l'existence de bases orthonormées entraîne à elle seule des affirmations algébriques non banales. Soit par exemple G une matrice symétrique *définie positive* (i.e. la forme quadratique $x^{\mathsf{T}}Gx$ est définie positive) quelconque. On choisit dans un espace vectoriel $\mathscr{V}$ (disons, dans $\mathbb{R}^n$) une base quelconque $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ et on le structure en espace euclidien en posant $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}G\mathbf{y}$ pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{V}$ quelconques (voir proposition 1), i.e. en prenant G pour matrice des coefficients métriques de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Il est déjà connu qu'il existe dans $\mathscr{V}$ une base orthonormée $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$. Soit C la matrice de passage de $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ à $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, auquel cas $G = C^{\mathsf{T}} EC = C^{\mathsf{T}}C$, E étant la matrice des coefficients métriques de la base orthonormée $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$, i.e. une matrice unité. Inversement, étant données une matrice non dégénérée quelconque C, une base orthonormée $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ d'un espace vectoriel euclidien arbitraire $\mathscr{V}$ et $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base liée à $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ par la matrice de passage C, la matrice G des coefficients métriques de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est égale à $C^{\mathsf{T}} EC = C^{\mathsf{T}} C$ (on sait que G est une matrice symétrique définie positive). Ainsi, *une condition nécessaire et suffisante pour que G soit une matrice symétrique définie positive est qu'il existe une matrice non dégénérée C telle que*

$$G = C^{\mathsf{T}}C. \quad \square \tag{11}$$

Ce résultat est d'une importance pratique limitée du moment qu'il ne permet pas de trouver C connaissant G. On évite cet inconvénient si l'on utilise un des procédés de construction explicite d'une base orthonormée $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ connaissant toute base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Le *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* est du nombre.

Il s'agit dans cette méthode de transformer de proche en proche une base donnée $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ en une base orthonormée. Soit $0 \leqslant$

$\leqslant k \leqslant n$. Nous dirons que la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *est orthonormée jusqu'au numéro* k si sa sous-famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ est orthonormée. Toute base est donc orthonormée jusqu'au numéro 0, et une base orthonormée jusqu'au numéro n n'est rien autre qu'une base orthonormée usuelle. On cherche donc un procédé de transformation d'une base quelconque $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ orthonormée jusqu'à l'indice $k < n$ en une base qui l'est jusqu'au numéro $k + 1$.

La méthode proposée par Gram et Schmidt consiste à transformer le seul vecteur de base $\mathbf{e}_{k+1}$. On le remplace par

$$\mathbf{e}'_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - x_1\mathbf{e}_1 - \ldots - x_k\mathbf{e}_k,$$

avec $x_1, \ldots, x_k$ les coefficients de Fourier de $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}$ par rapport à la famille orthonormée $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (il est naturel que le procédé tombe en défaut pour $k = 0$). Il est clair qu'on obtient encore une base. De plus, le vecteur $\mathbf{e}'_{k+1}$ est orthogonal à tous les $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (voir proposition 2). On aboutit donc au résultat voulu « en normant » ce vecteur, i.e. en le divisant par sa valeur absolue, ce qui donne évidemment une base orthonormée jusqu'à l'indice $k + 1$. □

On observe que la base orthonormée ainsi obtenue est liée à la base primitive par une matrice de passage *triangulaire*. Ainsi, on a trouvé un moyen d'effectuer la décomposition (11) et démontré que *toute matrice symétrique définie positive G admet la décomposition* (11), *C étant une matrice triangulaire.* □

* * *

Nous avons dit plus haut qu'un même espace vectoriel peut être structuré en divers espaces euclidiens. On peut par exemple orthonormer toute base donnée à l'avance.

Néanmoins, il existe pour tout $n \geqslant 0$ un seul (dans un sens) espace euclidien (vectoriel ou ponctuel).

Définition 7. Soient $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ deux espaces vectoriels euclidiens. Une application $\varphi : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}''$ est un *isomorphisme* s'il est un isomorphisme des espaces vectoriels associés (voir définition 1, leçon 5) et conserve le produit scalaire, i. e.

$$\varphi(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}'$.

Deux espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ sont *isomorphes* s'il existe au moins un isomorphisme $\mathcal{V}' \to \mathcal{V}''$.

Théorème 1. *Deux espaces vectoriels euclidiens quelconques de même dimension n sont isomorphes. L'isomorphisme est défini par égalité des coordonnées dans deux bases orthonormées quelconques.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans toute base orthonormée le produit scalaire est défini par la formule

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \ \square$$

Un moyen naturel de transformer $\mathbb{R}^n$ en un espace euclidien est d'affirmer que la base canonique est orthonormée, i. e. de poser par définition pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ arbitraires

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

auquel cas l'isomorphisme de coordonnées associé $\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ est, pour toute base orthonormée $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ d'un espace vectoriel euclidien quelconque $\mathcal{V}$, un isomorphisme entre deux espaces euclidiens.

S'agissant des espaces ponctuels euclidiens, on a évidemment des définitions et des résultats analogues.

* * *

Passons aux matrices associées aux changements de base pour les bases orthonormées.

Définition 8. La matrice C de passage d'une base orthonormée à une autre est dite *orthogonale*.

Comme la matrice des coefficients métriques dans les deux bases est la matrice unité E, C est orthogonale si et seulement si

$$C^{\mathsf{T}}C = E. \tag{12}$$

Posons

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1} \ldots c_{nn} \end{pmatrix}.$$

On voit que l'égalité (12) est équivalente à $\frac{n(n+1)}{2}$ relations

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \ldots + c_{ni}c_{nj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, $i \leqslant j$, qui signifient que les colonnes de C constituent une famille (une base) orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (en effet, ces colonnes sont formées de coordonnées des vecteurs orthonormés par rapport à une base orthonormée).

L'égalité (12) équivaut à

$$C^{-1} = C^{\mathsf{T}},$$

et celle-ci à

$$CC^{\mathsf{T}} = E.$$

La dernière relation signifie que

$$c_{i1}c_{j1} + \ldots + c_{in}c_{jn} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$$

$i, j = 1, \ldots, n$ étant quelconques, i.e. les lignes de C constituent une autre famille orthonormée.

Faisons le bilan. On a la

Proposition 4. *La matrice C est orthogonale si et seulement si elle jouit de l'une quelconque (donc de toute autre) des propriétés suivantes:*

a) $C^{\mathsf{T}}C = E$;

b) *la matrice C a ses colonnes orthonormées*;

c) $C^{-1} = C^{\mathsf{T}}$;

d) $CC^{\mathsf{T}} = E$;

e) *la matrice C a ses lignes orthonormées.* □

On passe dans a) aux déterminants, il vient, compte tenu de $\det C^{\mathsf{T}} = \det C$,

$$(\det C)^2 = 1,$$

i. e.

$$\det C = \pm 1.$$

Ainsi, *le déterminant d'une matrice orthogonale est* ± 1.

Définition 9. Une matrice orthogonale C est *unimodulaire* si $\det C = 1$.

Il est évident que l'inverse d'une matrice orthogonale (resp. orthogonale unimodulaire) est une matrice orthogonale (resp. orthogonale unimodulaire), ainsi que le produit de deux matrices orthogonales (resp. orthogonales unimodulaires) (par exemple, $(C_1C_2)^{\mathsf{T}}(C_1C_2) = C_2^{\mathsf{T}}(C_1^{\mathsf{T}}C_1)\,C_2 = C_2^{\mathsf{T}}C_2 = E$ si $C_1^{\mathsf{T}}C_1 = E$ et $C_2^{\mathsf{T}}C_2 = E$). Algébriquement, l'ensemble de toutes les matrices orthogonales (resp. orthogonales unimodulaires) d'ordre n donné forme un groupe noté $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$).

* * *

Quand $n = 1$, la matrice orthogonale $C = (c_{11})$ n'est rien autre que le nombre c_{11} vérifiant l'égalité $c_{11}^2 = 1$, i. e. le groupe orthogonal $\mathrm{O}(1)$ a deux éléments $+1$, -1, et le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(1)$ est réduit à un seul élément:

$$\mathrm{O}(1) = \{1, -1\}, \quad \mathrm{SO}(1) = \{1\}.$$

Dans le cas $n = 2$, on a trois conditions d'orthogonalité

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1,$$
$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0,$$
$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1,$$

dont la première et la troisième signifient qu'on trouve des angles α et β tels que

$$c_{11} = \cos\alpha, \quad c_{21} = \sin\alpha,$$
$$c_{12} = \cos\beta, \quad c_{22} = \sin\beta,$$

et la deuxième qu'il y a entre α et β la relation

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta = 0,$$

i. e.

$$\cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Ainsi, on a, ou bien $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, ou bien $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$, i. e. la matrice C s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ou

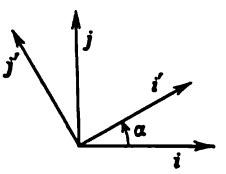
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

et elle est unimodulaire dans le premier cas et non unimodulaire dans le second.

En particulier, *toute matrice orthogonale unimodulaire d'ordre* 2 *s'écrit*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

i. e. deux bases orthonormées de même sens **i**, **j** et **i**′, **j**′ du plan sont



Angle α

reliées par les formules

$$\mathbf{i}' = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \sin\alpha\cdot\mathbf{j},$$
$$\mathbf{j}' = -\sin\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\alpha\cdot\mathbf{j},$$

et les coordonnées correspondantes x, y et x', y' par

$$x = \cos\alpha\cdot x' - \sin\alpha\cdot y',$$
$$y = \sin\alpha\cdot x' + \cos\alpha\cdot y'.$$

Comme $\mathbf{i}'\mathbf{i} = \cos\alpha$, $\mathbf{j}'\mathbf{i} = -\sin\alpha$ et $|\mathbf{i}| = |\mathbf{i}'| = 1$, on obtient la base **i**′, **j**′ en faisant tourner d'angle α la base **i**, **j**.

Le cas des matrices orthogonales d'ordre 3 s'avère assez délicat, et nous passerons outre.

* * *

Dans un espace ponctuel euclidien les formules de transformation des coordonnées rectangulaires s'écrivent (sous forme matricielle; voir (7), leçon 11):

$$x = Cx' + b,$$

C étant une matrice orthogonale et b une colonne quelconque. Lorsque $n = 2$, on a en particulier (en désignant les coordonnées par x et y) les *formules de transformations des coordonnées rectangulaires dans le plan*

$$x = \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y' + x_0,$$
$$y = \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y' + y_0,$$

avec α l'angle entre les directions positives des axes des abscisses des deux systèmes de coordonnées et (x_0, y_0) les coordonnées de la « nouvelle » origine O' dans l'« ancien » système.

LEÇON 15

Trivecteurs dans l'espace euclidien orienté.— Produit mixte de trois vecteurs.— Aire d'un bivecteur dans l'espace euclidien.— Vecteur complétant un bivecteur dans l'espace euclidien orienté.— Produit vectoriel.— Isomorphisme d'espaces vectoriels de vecteurs et de bivecteurs.— Produit vectoriel en coordonnées.— Equation normale de la droite dans le plan euclidien. Distance d'un point à une droite.— Angles de deux droites dans le plan euclidien.

Dans l'espace euclidien (de dimension 3), la théorie des bivecteurs et des trivecteurs se simplifie et se réduit en fait à celle des vecteurs. Plaçons-nous d'abord dans le cas de trivecteurs parce que le plus simple.

* * *

Soit $\mathcal{T}$ un espace euclidien (de dimension 3) quelconque. On le suppose orienté et on choisit une base orthonormée directe quelconque **i**, **j**, **k**. Il y a entre **i**, **j**, **k** et une autre base pareille **i**′, **j**′, **k**′ la relation définie par une matrice de passage orthogonale unimodulaire. Le déterminant de celle-ci étant $+1$, on a

$$\mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}' \wedge \mathbf{k}' = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$$

(voir (2), leçon 13). Ainsi, le *trivecteur* $\mathfrak{A}_0 = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ *ne dépend pas de la base* **i**, **j**, **k**, i. e. il est le même pour toute base (orthonormée directe).

Puisque $\mathfrak{A}_0 \neq 0$, tout trivecteur $\mathfrak{A} \in \mathcal{T} \wedge \mathcal{T} \wedge \mathcal{T}$ s'écrit

$$\mathfrak{A} = a\mathfrak{A}_0,$$

a étant un nombre.

Définition 1. Le nombre a s'appelle la *grandeur* (ou le *volume orienté*) du trivecteur $\mathfrak{A}$ et $|\mathbf{a}|$ en est le *volume*.

Conformément à la théorie générale des volumes, la définition 1 signifie que $\mathfrak{A}_0$ constitue l'étalon de volume dans l'espace, i.e. le volume du cube unité (un cube d'arête un) est 1. Ainsi, *en munissant un espace vectoriel d'une structure euclidienne, on y définit de façon unique la mesure des volumes.*

* * *

Définition 2. La grandeur du trivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ s'appelle *produit mixte* des vecteurs **a**, **b** et **c** et se note (**a**, **b**, **c**).

On sait par la formule (3) de la leçon 13 que si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ et $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, alors

$$(1) \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

On observe que le produit mixte *dépend* de l'orientation de l'espace : il change de signe si l'on inverse l'orientation.

Les propriétés algébriques du produit mixte sont naturellement les mêmes que celles du produit extérieur : il est distributif (par rapport à l'addition), homogène (par rapport à la multiplication des vecteurs par des scalaires), anticommutatif (i. e. il change de signe par transposition des facteurs) et libre (il est 0 si et seulement si les facteurs sont coplanaires).

Ce sont exactement les propriétés algébriques des déterminants, si bien que le produit mixte n'est rien autre que l'interprétation géométrique des déterminants d'ordre 3.

Ainsi, les trivecteurs dans l'espace euclidien (orienté!) sont remplacés de façon naturelle (sans arbitraire aucun) par des nombres (qui en sont les grandeurs), et le produit extérieur de trois vecteurs fait place à leur produit mixte.

* * *

S'agissant des bivecteurs, on se heurte, on s'y attend d'ailleurs, à certaines difficultés.

Soit $\alpha = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ un bivecteur non nul quelconque (d'un espace euclidien $\mathcal{T}$). Il ne change visiblement pas si l'on substitue à $\mathbf{b}$ le vecteur $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}$ orthogonal à $\mathbf{a}$. On peut donc supposer dès le début sans restreindre la généralité de l'exposé que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont orthogonaux. On norme ces vecteurs et on met en facteur, il vient pour α

$$(2) \qquad \alpha = a\,(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2),$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ étant orthonormés et $a > 0$.

La formule (2) avec $a = 0$ a également lieu pour $\alpha = 0$.

Il est immédiat de vérifier que *le nombre* $a \geqslant 0$ *de* (2) *est bien défini par le bivecteur* α. En effet, l'égalité

$$a\,(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = a'\,(\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2),$$

avec $a > 0$, $a' > 0$, les couples $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ étant orthonormés, signifie que

$$a'\mathbf{e}'_1 = k\,(a\mathbf{e}_1) + l\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}'_2 = k'\,(a\mathbf{e}_1) + l'\mathbf{e}_2,$$

et

$$\begin{vmatrix} k & l \\ k' & l' \end{vmatrix} = 1.$$

Dans ce cas,

$$\mathbf{e}_1' = \frac{ka}{a'}\mathbf{e}_1 + \frac{l}{a'}\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_2' = (k'a)\,\mathbf{e}_1 + l'\mathbf{e}_2,$$

d'où l'orthogonalité de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{ka}{a'} & k'a \\ \frac{l}{a'} & l' \end{pmatrix},$$

donc son déterminant a/a' est ± 1, et, partant, $a' = \pm a$. Les nombres a et a' étant positifs par définition sont égaux entre eux. □

Définition 3. Le nombre a de la formule (2) est l'*aire* du bivecteur α.

Cette définition est correcte par suite des résultats obtenus.

Avec un espace structuré en espace euclidien, on introduit dans chaque plan un étalon d'aire, les étalons de divers plans étant identiques dans un sens (qu'on pourrait préciser si besoin est).

On observe que s'agissant des espaces affines, on ne possède aucun procédé naturel pour identifier les étalons d'aire dans des plans distincts (non parallèles).

* * *

Supposons que l'espace euclidien considéré est *de dimension* 3 et orienté. (Les bivecteurs de l'espace de dimension 2 sont peu intéressants du fait qu'ils sont complètement analogues aux trivecteurs dans l'espace de dimension 3 et constituent une image géométrique fidèle des déterminants d'ordre 2).

La première chose à dire est que *pour tout couple de vecteurs orthonormés* $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ *il existe un, et un seul, vecteur* $\mathbf{e}_3$ *tel que* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *forment une base orthonormée directe.*

En effet, la famille orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ n'est pas génératrice, si bien qu'elle n'est pas maximale (voir proposition 3, leçon 14). Il existe donc un vecteur $\mathbf{e}_3$ tel que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ soient une base orthonormée. Si la base est directe, l'existence de $\mathbf{e}_3$ se trouve démontrée. Dans le cas contraire, il suffit de changer le signe de $\mathbf{e}_3$. Soit un vecteur

$$\mathbf{e}_3' = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$$

tel que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3$ constituent une base orthonormée directe. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

étant la matrice de passage de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ à $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3$ est orthogonale unimodulaire, ce qui n'est possible que pour $a = b = 0$, $c = 1$. Le vecteur $\mathbf{e}_3$ est donc unique. □

Définition 4. On appelle *vecteur complétant le bivecteur* (2), et on note $\mathfrak{a}^\perp$, un vecteur défini par la formule

$$\mathfrak{a}^\perp = a\mathbf{e}_3,$$

$\mathbf{e}_3$ étant le vecteur tel que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée directe.

On vérifie le caractère correct de la définition sous la condition suffisante « *si* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *et* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *sont des bases orthonormées de même sens telles que* $\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, *alors* $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ ».

Soit

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ à $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Elle est orthogonale et unimodulaire de sorte que

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 &= 1, \\ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 1.$$

D'autre part, on a

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0$$

(car $\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$), et la matrice

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$$

(évidemment orthogonale) est unimodulaire. Ainsi

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 &= 1, \\ l_1^2 + l_2^2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Les relations écrites entraînent de suite $k_3 = 0$, $l_3 = 0$, $m_3 = 1$, si bien que $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$. □

* * *

Définition 5. On appelle le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, et on note $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, le vecteur complétant le produit extérieur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{\perp}.$$

Revenons au produit mixte $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ et démontrons la

Proposition 1. *Quels que soient trois vecteurs* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, *on a*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c}.$$

Démonstration. La formule est triviale pour $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Soit $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$. On construit le vecteur $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en mettant le bivecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$ sous la forme

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a\,(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2),$$

avec $a > 0$ et $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ des vecteurs orthonormés. On raisonne comme plus haut et on a évidemment les formules

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2,$$

d'où $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1b_2\,(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$. Aussi $a = a_1b_2$, donc $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_2\mathbf{e}_3$, avec $\mathbf{e}_3$ le vecteur complétant $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Si

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3,$$

on a donc $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c} = a_1b_2c_3$. Or,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3.$$

Ainsi $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. □

Proposition 2. *Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition, i. e.*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

pour n'importe quels trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur quelconque. On a par suite de la propriété distributive des produits mixte et scalaire

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}))\, \mathbf{x} = \mathbf{a}\, (\mathbf{b} + \mathbf{c})\, \mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{x}) =$$
$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{x} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\, \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c})\, \mathbf{x}.$$

On prend pour $\mathbf{x}$ les vecteurs d'une base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et on en tire que les vecteurs $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ et $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ont tous leurs coefficients de Fourier identiques. On identifie donc ces vecteurs. □

Conséquence. *Le vecteur complétant la somme de deux bivecteurs est égal à la somme des vecteurs complétant les termes, i. e.*

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{\perp} = \mathfrak{a}^{\perp} + \mathfrak{b}^{\perp}$$

quels que soient les bivecteurs $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$. □

C'est en fait une reformulation de la proposition 2.

Proposition 3. *Le produit vectoriel est homogène et anticommutatif, i. e.*

$$k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b},$$
$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

pour tout nombre k *et tout couple de vecteurs* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$.

Démonstration. La première affirmation découle de suite de l'homogénéité des produits mixte et scalaire (cf. démonstration de la proposition 2), et la seconde résulte de la première et de la propriété anticommutative du produit extérieur. □

Conséquence. *Pour tout nombre* k *et tout bivecteur* $\mathfrak{a}$ *on a l'égalité*

$$(k\mathfrak{a})^{\perp} = k\mathfrak{a}^{\perp}. \ \square$$

On observe que ce résultat s'obtient immédiatement de façon élémentaire. En effet, si $\mathfrak{a} = a(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$ et $\mathfrak{a}^{\perp} = a\mathbf{e}_3$, alors $k\mathfrak{a} = ka(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$ pour $k \geqslant 0$, donc $(k\mathfrak{a})^{\perp} = ka\mathbf{e}_3 = k\mathfrak{a}^{\perp}$. Si $k < 0$, alors $k\mathfrak{a} = |k|\, a(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1)$ et, partant, $(k\mathfrak{a})^{\perp} = |k|\, a(-\mathbf{e}_3) = ka\mathbf{e}_3 = k\mathfrak{a}^{\perp}$ du moment que $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_3$ est une base orthonormée directe. □

C'est encore la démonstration directe de la proposition 3 (à ce qu'il paraît il n'en existe pas pour la proposition 2).

Théorème 1. *La correspondance* $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{\perp}$ *est un isomorphisme de l'espace vectoriel* $\mathcal{V}' \wedge \mathcal{V}'$ *sur l'espace vectoriel* $\mathcal{V}'$.

Démonstration. Etant données deux conséquences ci-dessus, il faut montrer que $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{\perp}$ est une bijection, i. e. que pour tout vecteur $\mathbf{a}$ il existe un bivecteur $\mathfrak{a}$ et un seul tel que $\mathfrak{a}^{\perp} = \mathbf{a}$.

Soit a la longueur de $\mathbf{a}$, i. e. $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_3$, avec $\mathbf{e}_3$ un vecteur unitaire (il est bien défini pour $a \neq 0$ et arbitraire dans le cas contraire). Soient $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ deux vecteurs tels que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée directe (il est immédiat que ces vecteurs existent) et soit $\mathfrak{a} = a(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$. Par définition $\mathfrak{a}^{\perp} = \mathbf{a}$, i. e. on a démontré l'existence de $\mathfrak{a}$.

L'unicité se démontre sous la condition suffisante qu'étant données deux bases orthonormées de même sens $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, l'égalité $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ implique $\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Or, ce résultat est quasi évident. En effet, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$, si bien que la matrice de passage de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ à $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition d'orthogonalité de la dernière ligne donne

$$m_1^2 + m_2^2 + 1 = 1,$$

d'où $m_1 = 0$ et $m_2 = 0$. Donc

$$\mathbf{e}_1' = k_1\mathbf{e}_1 + l_1\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_2' = k_2\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2,$$

et

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Par conséquent, $\mathbf{e}_1' \wedge \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. □

Conséquence. *Le produit vectoriel est libre, i. e.* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ *si et seulement si* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *sont colinéaires.* □

Il est important de remarquer que la correspondance complète entre les bivecteurs et les vecteurs (théorème 1) n'est possible que pour $n = 3$ et pour une certaine orientation de l'espace.

* * *

Toute base orthonormée directe $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vérifie évidemment les formules

$$(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k})^\perp = \mathbf{i}, \quad (\mathbf{k} \wedge \mathbf{i})^\perp = \mathbf{j}, \quad (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j})^\perp = \mathbf{k},$$

i. e.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Il en résulte (cf. (8), leçon (8)) que pour tout $\mathbf{a}$ et tout $\mathbf{b}$ définis par

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

on a la formule

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Il y a lieu de souligner qu'en plus de son caractère orthonormal, la base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ est supposée directe.

Par construction, la longueur $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ du produit vectoriel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est égale à l'aire S du parallélogramme construit sur $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Aussi

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Si le plan ou l'espace sont munis de la structure euclidienne (du produit scalaire), on enrichit sensiblement la théorie des droites

et des plans. Voyons d'abord ce qu'il en advient des droites dans le plan.

Soient, dans le plan euclidien, un vecteur non nul quelconque $\mathbf{n}$ et un point M_0.

L'ensemble des points M du plan pour lesquels le vecteur $\mathbf{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{M_0M}$, i. e.

$$\mathbf{n}\overrightarrow{M_0M} = 0, \tag{3}$$

est, on le voit aisément, une droite passant par M_0. En effet, la condition (3) s'écrit en coordonnées rectangulaires

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

avec A, B les coordonnées de $\mathbf{n}$, x, y et x_0, y_0 les coordonnées de M et M_0 respectivement. □

On dit du vecteur $\mathbf{n}$ qu'il est *orthogonal* à la droite. Il est bien défini, à la colinéarité près, par celle-ci. Toute équation de la droite

$$Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

(en coordonnées rectangulaires) définit le vecteur $\mathbf{n}(A, B)$ orthogonal à la droite. Si le vecteur est normé, i. e. si $A^2 + B^2 = 1$, et $C \leqslant 0$, alors l'équation (4) est l'*équation normale* de la droite. L'équation normale s'écrit d'ordinaire

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \tag{5}$$

α étant l'angle du vecteur $\mathbf{n}$ et du vecteur unitaire $\mathbf{i}$ de l'axe des abscisses. On ramène (4) à la forme (5) en la divisant par $\sqrt{A^2 + B^2}$, $C \leqslant 0$, et par $-\sqrt{A^2 + B^2}$, $C \geqslant 0$.

On introduit le rayon vecteur $\mathbf{r}(x, y)$ et le vecteur unitaire $\mathbf{n}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ et on met l'équation (5) sous forme vectorielle

$$\mathbf{nr} - p = 0. \tag{6}$$

Définition 6. Deux droites sont *perpendiculaires* si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Soit N le point d'intersection d'une droite passant par un point donné M perpendiculairement à la droite (6) (on vérifie de suite l'existence et l'unicité). La longueur $d = |NM|$ du segment $\overline{NM}$ s'appelle la *distance* du point M à la droite (6).

Cette distance est évidemment égale à la valeur absolue du produit scalaire $\mathbf{n}\overrightarrow{NM} = \mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{s})$, où $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont les rayons vecteurs de M et N respectivement. Le point N est situé sur la droite (6), donc $\mathbf{ns} = p$. Par conséquent,

$$d = |\mathbf{nr} - p| = |x \cos \alpha + y \sin \alpha - p|. \tag{7}$$

La formule (7) révèle le rôle des équations normales.

Lorsque $p \neq 0$, la quantité $\mathbf{nr} - p$ est positive (elle est donc égale à d) si et seulement si le point M n'appartient pas au demi-plan contenant l'origine des coordonnées.

* * *

Généralement, définir univoquement l'angle φ de deux droites dans le plan euclidien est une opération plutôt encombrante. Il est déjà apparu (leçon 13) qu'en le définissant bonnement et simplement comme angle des vecteurs directeurs, on a en général 4 valeurs distinctes. Si l'on impose la condition $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (auquel cas les angles pourraient être qualifiés de géométriques élémentaires), on a quand même à choisir entre deux angles adjacents supplémentaires (dont la somme est π).

Soient

(8) $$Ax + By + C = 0 \text{ et } A_1x + B_1y + C = 0$$

les équations (en coordonnées rectangulaires) des droites considérées. On prend naturellement pour φ l'angle des vecteurs directeurs $\mathbf{a}\,(B, -A)$ et $\mathbf{a}_1\,(B_1, -A_1)$ (qui donnent l'orientation définie par (8) des droites; cf. leçon 11). Donc

(9) $$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

La condition (9) avec $0 \leqslant \varphi < \pi$ définit univoquement l'angle φ. Il est aigu pour $AA_1 + BB_1 > 0$, obtus pour $AA_1 + BB_1 < 0$ et droit pour $AA_1 + BB_1 = 0$.

En particulier, *les droites* (8) *sont perpendiculaires si et seulement si*

$$AA_1 + BB_1 = 0.$$

Au lieu d'imposer la restriction géométrique élémentaire $0 \leqslant \varphi < \pi$, on peut exiger que la somme $\varphi + \frac{\pi}{2}$ soit l'un des angles formés par les vecteurs $\mathbf{a}\,(B, -A)$ et $\mathbf{n}_1\,(A_1, B_1)$. Vu que $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$, cela équivaut à la condition

(10) $$\sin\varphi = \frac{AB_1 - A_1B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

Les formules (9) et (10) définissent bien l'angle φ, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Sa valeur absolue est égale à l'angle φ géométrique élémentaire.

Une autre manière de fixer φ est de chercher l'angle géométrique élémentaire dont la tangente est la même que celle de l'angle φ. Autrement dit, cet angle est bien défini par la formule

(11) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}$$

et la condition $0 \leqslant \varphi < \pi$.

On recourt d'ordinaire à ce procédé quand les droites sont données par les équations

$$y = kx + b, \quad y = k_1x + b_1, \tag{12}$$

auquel cas la formule (11) se récrit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1}.$$

En particulier, *les droites* (12) *sont*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{parallèles}\\ \textit{perpendiculaires}\end{array}\right\} \textit{si} \left\{\begin{array}{l} k = k_1, \\ kk_1 = -1, \end{array}\right.$$

et dans ce cas seulement.

LEÇON 16

Plan dans l'espace euclidien.— Distance d'un point à un plan.— Angle de deux plans. Angle d'une droite et d'un plan. Angle de deux droites.— Distance d'un point à une droite dans l'espace.— Distance de deux droites dans l'espace.— Equation de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires dans l'espace.

La situation est la même pour deux plans dans l'espace euclidien.

Etant donné un vecteur non nul quelconque $\mathbf{n}\,(A, B, C)$, l'ensemble de tous les points $M\,(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$\mathbf{n}\overrightarrow{M_0M} = 0,$$

avec $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un point fixe, constitue le plan

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

On dit que le vecteur $\mathbf{n}$ est *orthogonal* à ce plan. Il s'agit du vecteur complétant le bivecteur directeur du plan, si bien qu'il est bien défini par le plan à la colinéarité près.

Toute équation du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

(en coordonnées rectangulaires) définit un vecteur $\mathbf{n}\,(A, B, C)$ orthogonal au plan. Si $\mathbf{n}\,(A, B, C)$ est normé, i. e. si $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, et $D \leqslant 0$, alors l'équation (1) s'appelle l'*équation normale* du plan. Son écriture usuelle est

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{2}$$

où α, β, γ sont les angles formés par $\mathbf{n}$ et les vecteurs de base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, et $p \leqslant 0$. On ramène l'équation (1) à la forme (2) en la divisant par $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (cas $D \leqslant 0$) ou par $-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (cas $D \geqslant 0$).

L'équation (2) s'écrit en notations vectorielles

$$\mathbf{nr} - p = 0. \tag{3}$$

Définition 1. Si le vecteur directeur d'une droite est colinéaire à $\mathbf{n}$, la droite est dite *perpendiculaire* au plan (3). Soit N le point d'intersection de la droite passant par un point donné M et perpendiculaire au plan (3) avec ce plan. La longueur $d = |NM|$ du segment $\overline{NM}$ s'appelle la *distance du point M au plan* (3).

On imite le cas d'un point et d'une droite pour démontrer que *la distance du point M au plan* (3) *s'exprime par la formule*

$$d = |\,\mathbf{nr} - p\,|,$$

$\mathbf{r}$ *étant le rayon vecteur de M.*

* * *

L'*angle de deux plans* est défini comme angle de deux vecteurs orthogonaux à ces plans. On le fixe univoquement par les trois procédés décrits pour l'angle de deux droites dans le plan et on obtient des formules analogues. On le vérifie trivialement, si bien qu'on passera outre. On observe seulement que *deux plans*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{et} \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

sont perpendiculaires (i. e. l'angle de ces plans vaut $\pi/2$) *si et seulement si l'on a*

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

On définit de même l'*angle formé par une droite et un plan* comme l'angle complémentaire de l'angle entre le vecteur directeur $\mathbf{a}\,(l, m, n)$ de la droite et le vecteur $\mathbf{n}\,(A, B, C)$ orthogonal au plan sous certaines conditions supplémentaires qui garantissent l'unicité. Cet angle est donné par la formule

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

En particulier, *une droite et un plan sont perpendiculaires si et seulement si*

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Enfin, l'*angle de deux droites dans l'espace* se définit moyennant la règle générale (comme l'angle de leurs vecteurs directeurs $\mathbf{a}\,(l, m, n)$ et $\mathbf{a}_1\,(l_1, m_1, n_1)$), si bien qu'on a la formule

$$\cos\varphi = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}.$$

Les notions de distance d'un point à une droite dans l'espace et de distance de deux droites dans l'espace sont plus intéressantes.

Par une droite quelconque $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ et un point arbitraire $M\,(\mathbf{r})$ non sur cette droite, il passe un plan et un seul (c'est le plan passant par le point $M_0\,(\mathbf{r}_0)$, dont le bivecteur directeur est $\overrightarrow{M_0M} \wedge \mathbf{a}$). La distance d de M à la droite du plan est par définition la *distance de M à la droite dans l'espace.*

Selon cette définition, on calcule d en cherchant un point N de la droite tel que NM soit perpendiculaire à la droite donnée, i. e. que le vecteur $\overrightarrow{NM}$ soit orthogonal au vecteur $\mathbf{a}$. Alors d est égale

à la longueur de $\overrightarrow{NM}$, i. e.

$$\overrightarrow{NM} = d\mathbf{e}_1,$$

$\mathbf{e}_1$ étant un vecteur unitaire, et donc

$$\overrightarrow{NM} \wedge \mathbf{a} = ad(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2),$$

où a est la longueur du vecteur $\mathbf{a}$ et $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}}{a}$. Les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont unitaires et orthogonaux (ils forment une famille orthonormée), si bien que la dernière formule entraîne $|\overrightarrow{NM} \wedge \mathbf{a}| = ad$, i. e.

$$d = \frac{1}{a}|\overrightarrow{NM} \times \mathbf{a}|.$$

D'autre part, le point N est situé sur la droite donnée, et son rayon vecteur $\mathbf{s}$ s'écrit donc $\mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}$, t_1 étant un nombre. Aussi $\overrightarrow{NM} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - t_1\mathbf{a}$, donc

$$\overrightarrow{NM} \times \mathbf{a} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}.$$

Ainsi, on a établi la formule

$$d = \frac{1}{a}|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}|$$

ou, en coordonnées,

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

Soient

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{a}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{b} \tag{4}$$

deux droites non parallèles et non coplanaires dans l'espace. On vérifie qu'*il existe un couple de nombres* (s_0, t_0) *et un seul tel que la droite* N_0N_1 *passant par les points* $N_0(\mathbf{n}_0)$ *et* $N_1(\mathbf{n}_1)$, *où* $\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}_0 + s_0\mathbf{a}$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1 + t_0\mathbf{b}$, *soit perpendiculaire aux deux droites* (4).

En effet, la droite N_0N_1 a le vecteur directeur $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + t_0\mathbf{b} - s_0\mathbf{a}$, et elle est perpendiculaire aux droites (4) si et seulement si $(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{a} = 0$ et $(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{b} = 0$, i. e. si

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\,\mathbf{a} + t_0\mathbf{ba} - s_0\mathbf{a}^2 = 0,$$

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\,\mathbf{b} + t_0\mathbf{b}^2 - s_0\mathbf{ab} = 0.$$

On achève la démonstration si l'on remarque que ce système d'équations linéaires en s_0, t_0 admet une solution unique

$$s_0 = \frac{\begin{vmatrix} (r_1 - r_0)\,\mathbf{a} & \mathbf{ab} \\ (r_1 - r_0)\,\mathbf{b} & \mathbf{b}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{ab} \\ \mathbf{ab} & \mathbf{b}^2 \end{vmatrix}}, \qquad t_0 = -\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & (r_1 - r_0)\,\mathbf{a} \\ \mathbf{ab} & (r_1 - r_0)\,\mathbf{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{ab} \\ \mathbf{ab} & \mathbf{b}^2 \end{vmatrix}}.$$

(Le dénominateur est non nul parce que **a** et **b** ne sont pas colinéaires.) □

La droite N_0N_1 est la *perpendiculaire commune* aux droites non coplanaires, et la longueur $d = |N_0N_1|$ du segment $\overline{N_0N_1}$ est la *distance* de ces droites.

Le nom du nombre d provient du résultat facile à établir : *pour tout point M_0 de la droite* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{a}$ *et tout point M_1 de la droite* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{b}$, *on a l'inégalité*

$$|M_0M_1| \geqslant |N_0N_1|,$$

l'égalité étant stricte dans le seul cas où $M_0 = N_0$, $M_1 = N_1$. En effet,

$$\begin{aligned} |M_0M_1|^2 &= ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + t\mathbf{b} - s\mathbf{a})^2 = \\ &= \{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + t_0\mathbf{b} - s_0\mathbf{a}] + (t - t_0)\,\mathbf{b} - (s - s_0)\,\mathbf{a}\}^2 = \\ &= ((\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0) + (t - t_0)\,\mathbf{b} - (s - s_0)\,\mathbf{a})^2 = (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)^2 + \\ &\qquad + [(t - t_0)\,\mathbf{b} - (s - s_0)\,\mathbf{a}]^2 \end{aligned}$$

car $(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{a} = 0$ et $(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{b} = 0$ (théorème de Pythagore). Aussi

$$|M_0M_1|^2 \geqslant (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)^2 = |N_0N_1|^2,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $s = s_0$, $t = t_0$. □

On observe que le produit mixte $(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ne dépend pas des points M_0 et M_1 des droites (4) parce que si l'on en choisit d'autres, on adjoint au vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ une combinaison linéaire de **a** et **b**. Mais ce produit est égal à $[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ pour $s = 0$, $t = 0$ et à $\overrightarrow{N_0N_1}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \pm\,|N_0N_1| \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ pour $s = s_0$, $t = t_0$ (vu la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{N_0N_1}$ et $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Par conséquent,

$$d = \frac{|[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}, \mathbf{b}]|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

et en coordonnées

$$(5) \qquad d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & n \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}} \right|,$$

où l, m, n sont les coordonnées du vecteur directeur $\mathbf{a}$; l_1, m_1, n_1 les coordonnées du vecteur directeur $\mathbf{b}$; x_0, y_0, z_0 les coordonnées du rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ et x_1, y_1, z_1 celles du rayon vecteur $\mathbf{r}_1$.

Ainsi, la formule (5) donne la distance de deux droites non parallèles

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad \text{et} \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}. \tag{6}$$

S'agissant de la droite N_0N_1, on connaît le rayon vecteur de son point N_0 et le vecteur directeur $\overrightarrow{N_0N_1}$, si bien qu'on écrit l'équation paramétrique de cette droite, qui devient par des transformations identiques évidentes

$$\mathbf{r}=\left|\frac{\begin{vmatrix}(1-t)\mathbf{r}_0+t\mathbf{r}_1 & -(1-t)\,\mathbf{a} & t\mathbf{b}\\ (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{a} & \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}\,\mathbf{b}\\ (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{b} & \mathbf{a}\mathbf{b} & \mathbf{b}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{a}^2 & \mathbf{a}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\mathbf{b} & \mathbf{b}^2\end{vmatrix}}\right|.$$

On peut définir cette droite comme une ligne intersection de deux plans dont l'un passe par le point M_0 (x_0, y_0, z_0) et a le bivecteur directeur $\mathbf{a} \wedge \overrightarrow{N_0N_1}$ (ou, ce qui revient au même, le bivecteur directeur $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$) et l'autre passe par le point M_1 (x_1, y_1, z_1) et a pour bivecteur directeur $\mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, i. e. on la caractérise par les équations

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ l & m & n\\ \begin{vmatrix}m & n\\ m_1 & n_1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}l & n\\ l_1 & n_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}l & m\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0,\\[2ex] \begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ \begin{vmatrix}m & n\\ m_1 & n_1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}l & n\\ l_1 & n_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}l & m\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0.\end{cases}$$

LEÇON 17

Parabole.— Ellipse.— Propriété focale de l'ellipse. Ellipse définie par foyer et directrice.— Hyperbole.— Propriété focale de l'hyperbole. Hyperbole définie par foyer et directrice.

Dans cette leçon, nous nous proposons d'étudier trois courbes remarquables du plan euclidien que sont la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Bien que de formes différentes, elles constituent naturellement, on va le voir, un seul groupe.

* * *

Définition 1. On appelle *parabole* une courbe du plan euclidien, dont l'équation en coordonnées rectangulaires x, y s'écrit

$$y^2 = 2px, \text{ où } p > 0. \tag{1}$$

Chose à noter, nous ne donnons pas de définition générale d'une courbe du moment que nous nous passerons de théorèmes relatifs à des « courbes en général ». Une courbe est pour nous une « partie du plan », mais ce terme a ici un sens plus restreint déterminé par la tradition.

L'« équation » d'une courbe sera par définition une relation quelconque entre les coordonnées x, y qui n'est satisfaite que lorsque le point M (x, y) de coordonnées x, y appartient à la courbe considérée. Loin d'être une définition rigoureuse, cette phrase n'a d'autre ambition que de décrire une notion suffisamment floue. Nous ne parlerons donc pas de liens entre les « équations » et les « courbes ». Nous ne dirons pas que toute courbe est définie par une équation ni que toute équation définit une courbe. Mais quand nous définirons une courbe particulière (ou une classe de courbes), nous donnerons toujours une équation correspondante.

En fait, on pourrait se passer des notions de courbe et de son équation si cette façon d'agir ne se soldait pas par des formulations inhabituelles et laborieuses. La définition 1 s'énoncerait par exemple comme suit : un ensemble de points du plan s'appelle parabole s'il existe un système de coordonnées rectangulaires x, y et un nombre $p > 0$ tels que le point M (x, y) appartienne à cet ensemble si et seulement si $y^2 = 2px$.

Les coordonnées rectangulaires x, y de la définition 1 s'appellent *coordonnées canoniques* de la parabole et l'équation (1) est son *équation canonique*.

L'axe des abscisses du système canonique est axe de symétrie de la parabole (parce que l'équation (1) ne change pas si y change de signe). C'est la raison pour laquelle cette droite s'appelle *axe* de la parabole (on dit des fois que c'est l'*axe focal*).

Quand $x < 0$, l'équation (1) n'est vérifiée par aucun point, i.e. la parabole se situe tout entière dans le demi-plan $x \geqslant 0$.

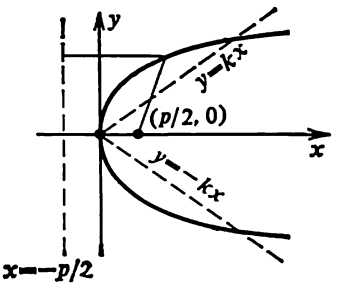
La parabole (1) coupe l'axe des ordonnées $x = 0$ en un seul point O (0, 0) qui est son *sommet*.

Les deux propriétés citées entraînent de suite que *l'axe de la parabole est son seul axe de symétrie.*

Le rapport

$$\frac{|y|}{x} = \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}$$

tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$. Cela signifie qu'à partir d'un x suffisamment grand, la parabole est contenue dans tout angle de bissectrice le demi-axe positif de l'axe des abscisses. Géométriquement, un observateur placé suivant Ox et regardant dans la direction des x croissants voit la parabole converger vers un point bien qu'elle s'écarte aussi loin qu'on le veut de l'axe des abscisses ($|y| \to +\infty$ si $x \to +\infty$).



Parabole

On souligne que l'axe et le sommet de la parabole se définissent bien d'une manière purement géométrique sans faire appel à des coordonnées: l'axe est l'axe de symétrie et le sommet est le point commun à l'axe et à la courbe. Cela signifie que les axes du système de coordonnées canoniques sont bien définis par la parabole: l'axe des abscisses est l'axe de la courbe et l'axe des ordonnées est la droite passant par le sommet perpendiculairement à l'axe. Le sens positif de l'axe des abscisses est également déterminé par la parabole (en tant que sens qui définit le sens + dans le demi-plan contenant la parabole).

Ainsi, on peut dire que les coordonnées canoniques sont bien définies par la parabole à un changement d'orientation de l'axe des ordonnées (i. e. au changement de signe de y) près.

Aussi les éléments de la parabole qui sont définis par les coordonnées canoniques, mais ne dépendent pas de l'orientation de l'axe des y sont invariants. Ce sont

le nombre p, *paramètre*,

le nombre $p/2$, *distance focale*,

le point $(p/2, 0)$, *foyer*,

la droite $x = -p/2$, *directrice*.

On vérifie de suite que la *parabole est l'ensemble* (ou encore le lieu géométrique) *des points équidistants du foyer et de la directrice*. En effet, la condition de points équidistants

$$\left| x - \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

devient par l'élévation au carré et la réduction des termes semblables l'équation (1). Inversement, si $y^2 = 2px$, on est évidemment dans cette condition. □

* * *

Définition 2. On appelle *ellipse* une courbe du plan euclidien dont l'équation en coordonnées rectangulaires x, y s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } a \geqslant b > 0. \tag{2}$$

Les coordonnées x, y sont alors dites *canoniques* (pour l'ellipse), et l'équation (2) s'appelle l'*équation canonique* de l'ellipse.

Lorsque $b = a$, l'ellipse a pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{3}$$

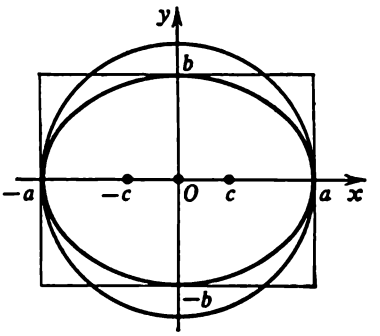
qui définit évidemment une circonférence de rayon a et de centre O (0, 0), i. e. la circonférence est un cas particulier de l'ellipse.

Plaçons-nous dans le cas $b < a$ et interrogeons-nous sur la relation entre l'ellipse (2) et la circonférence (3). Soit $k = b/a$. Si un point de coordonnées x, y appartient à la circonférence (3), alors le point de coordonnées x, ky est sur la courbe (2) $\left(\text{car } \frac{x^2}{a^2} + \frac{(ky)^2}{b^2} = \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1\right)$ et vice versa. Autrement dit, l'ellipse considérée s'obtient de (3) par la transformation $(x, y) \mapsto (x, ky)$ qui est une *contraction* de rapport k des ordonnées relatives à l'axe des abscisses. Cette image géométrique donne une idée assez nette de la forme de l'ellipse, et, ce qui plus est, elle démontre (du moment que $k < 1$) qu'à part $\pm(a, 0)$ tous les points de l'ellipse (2) sont intérieurs à la circonférence (3).

Si $b = a$, toute droite passant par le point O (0, 0) est axe de symétrie de l'ellipse. Comme l'équation (2) contient les seuls carrés des coordonnées, les axes de coordonnées sont des axes de symétrie

de l'ellipse pour a et b quelconques. Le point O (0, 0) étant le point d'intersection des axes de symétrie est le centre de symétrie de l'ellipse.

Il se trouve que l'ellipse ne possède pas d'autres axes de symétrie pour $b < a$. En effet, tout axe de symétrie de l'ellipse passe par son centre de symétrie O (0, 0), et il constitue donc un axe de symétrie de la circonférence (3). Aussi la symétrie par rapport à cet axe doit conserver les points d'intersection de la circonférence (3) et de l'ellipse (2) qui sont, on le sait déjà, les points $(\pm a, 0)$. Par conséquent, ou bien cette symétrie laisse fixes les points $(a, 0)$, $(-a, 0)$, ou bien elle les échange. Dans le premier cas, l'axe de symétrie est l'axe des abscisses du système de coordonnées canoniques et dans le second, c'est l'axe des ordonnées.



Ellipse

Ainsi, les systèmes de coordonnées canoniques sont bien déterminés pour $b < a$ par l'ellipse, si bien que les coordonnées canoniques sont uniques au signe près.

Pour $b < a$, tous les éléments de l'ellipse définis par les coordonnées canoniques et indépendants de l'orientation des axes de coordonnées (i.e. fixes dans tout changement de signe des coordonnées) sont donc invariants.

Ces éléments sont

le nombre a, *demi grand axe*,

le nombre b, *demi petit axe*,

le nombre $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, *excentricité linéaire*,

le nombre $2c$, *distance focale*,

le nombre $e = c/a = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, *excentricité* (évidemment, $0 \leqslant e < 1$),

le nombre $p = \frac{b^2}{a}$, *paramètre*,

l'axe des abscisses, *grand axe* (ou *axe focal*),

l'axe des ordonnées, *petit axe*,

le point O (0, 0), *centre*,

les points $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$, *sommets*,

les points $(\pm c, 0)$, *foyers*,

les droites $x = \pm a/e$, $e \neq 0$, *directrices*.

Le foyer et la directrice sont dites *de droite* ou *de gauche* selon qu'ils sont $(c, 0)$, a/e ou $(-c, 0)$, $-a/e$. Ils sont donc de même sens ou de sens contraires. Cette relation entre le foyer et la directrice est

géométriquement invariante, tandis que les propriétés « le foyer (resp. directrice) est de droite ou de gauche » dépendent de l'orientation de l'axe des abscisses.

S'agissant de la circonférence $b = a$, $c = 0$, $e = 0$, $p = a$, les foyers se confondent avec le centre et les directrices sont indéterminées.

* * *

Le segment réunissant un point M (x, y) de l'ellipse au foyer est le *rayon focal* de ce point. Il y en a deux, celui *de droite* et celui *de gauche*.

La longueur r_1 du rayon focal de gauche vérifie l'équation

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2 =$$

$$= e^2x^2 + 2xea + a^2 = (ex + a)^2.$$

Comme $|x| \leqslant a$, donc $|ex| < a$, il en résulte

$$r_1 = a + ex.$$

On démontre de même, pour la longueur du rayon focal de droite

$$r_2 = a - ex.$$

Donc

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Inversement, soit M (x, y) un point du plan tel que la somme de ses distances aux foyers de l'ellipse vaut $2a$:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

On effectue plusieurs transformations évidentes (extraction de la racine, élévation au carré, réduction des termes semblables, extraction de la racine et élévation au carré) et on obtient l'équation (2), i.e. *l'ellipse* (2) *est le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux foyers est égale à* $2a$.

Cette propriété de l'ellipse est connue sous le nom de *propriété focale*.

La distance du point M (x, y) de l'ellipse (2) à la directrice de gauche $x = -a/e$ est égale à

$$\left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex + a|}{e} = \frac{r_1}{e},$$

et celle à la directrice de droite à

$$\left|x - \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex - a|}{e} = \frac{r_2}{e}.$$

Inversement, si

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = e \left| x \pm \frac{a}{e} \right|,$$

alors

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (ex \pm a)^2,$$

donc

$$(1 - e^2)\, x^2 + y^2 = a^2 - c^2,$$

ce qui équivaut évidemment à l'équation (2). Ainsi, *l'ellipse* (2) *est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances au foyer et à la directrice correspondante est égal à e.*

Cette propriété de l'ellipse est parfaitement analogue à celle de la parabole, si bien que la parabole est une sorte d'ellipse d'excentricité $e = 1$.

* * *

Définition 3. On appelle *hyperbole* une courbe du plan euclidien, dont l'équation en coordonnées rectangulaires x, y s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } a > 0, \quad b > 0. \tag{4}$$

Les coordonnées correspondantes sont dites *canoniques* (pour l'hyperbole) et (4) constitue l'*équation canonique* de cette courbe.

Si $b = a$, on a l'hyperbole *équilatère*. Son équation

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{5}$$

s'écrit en coordonnées

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

(rectangulaires elles aussi):

$$uv = 2a^2,$$

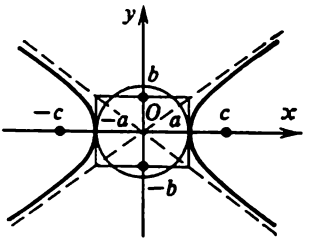
i.e. l hyperbole équilatère rapportée aux coordonnées u, v est la *courbe représentative des grandeurs inversement proportionnelles*, qui nous est connue dès l'école secondaire. En passant aux coordonnées x, y, on obtient donc la même courbe tournée de $\pi/4$.

Lorsque $u \to \pm\infty$ (resp. $v \to \pm\infty$), la courbe représentative dudit rapport de proportionnalité se rapproche progressivement de l'axe des abscisses $v = 0$ (resp. de l'axe des ordonnées $u = 0$), i.e. elle admet ces axes comme *asymptotes*. En coordonnées canoniques x, y, ces asymptotes sont les bissectrices $y = x$ et $y = -x$ des angles formés par les axes de coordonnées.

On passe de l'hyperbole équilatère (5) à l'hyperbole ordinaire (4) par contraction $(x, y) \mapsto (x, ky)$ de rapport $k = b/a$ des ordonnées relatives à l'axe des abscisses (on observe qu'à la différence du cas

de l'ellipse, k peut être supérieur à 1, si bien que la « contraction » peut être en fait une dilatation). Cela donne une idée suffisamment nette de la forme de l'hyperbole.

On voit en particulier que l'hyperbole comprend deux parties connexes obtenues pour $x > a$ et $x < -a$ respectivement, admet deux asymptotes d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ respectivement et qu'elle se situe dans les angles formés par les angles polaires des asymptotes.



Hyperbole

Ces parties sont respectivement les *branches de droite* et *de gauche*.

Comme l'équation (4) renferme seulement les carrés des coordonnées, les axes de coordonnées constituent les axes de symétrie de l'hyperbole, le point O (0, 0) étant le centre de symétrie.

On montre que l'hyperbole, équilatère ou non, ne possède pas d'autres axes de symétrie. En effet, tout axe de symétrie de l'hyperbole passe par son centre de symétrie. C'est donc axe de symétrie de la circonférence

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Les résultats précédents entraînent de suite que la courbe (4) coupe cette circonférence en deux points ($\pm a$, 0), si bien que ou la symétrie considérée laisse fixes ces points (i.e. c'est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses), ou elle les échange (c'est donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

On vient de démontrer que les axes de coordonnées canoniques sont bien définis par l'hyperbole, i.e. les coordonnées canoniques sont uniques au signe près. Aussi tous les éléments de l'hyperbole définis par les coordonnées canoniques sont invariants.

Ce sont

le nombre a, *demi-axe réel*,

le nombre b, *demi-axe imaginaire*,

le nombre $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, *excentricité linéaire*,

le nombre $2c$, *distance focale*,

le nombre $e = c/a = \sqrt{1 + b^2/a^2}$, *excentricité* (évidemment, $1 < e < \infty$),

le nombre $p = b^2/a$, *paramètre*,

l'axe des abscisses, *axe réel* (ou *focal*),

l'axe des ordonnées, *axe imaginaire*,

le point O (0, 0), *centre*,

les points ($\pm a$, 0), *sommets*,

les points $(\pm c, 0)$, *foyers*,
les droites $x = \pm a/e$, *directrices*.

* * *

Les foyers, les directrices, les rayons focaux de gauche, de droite et de même sens se définissent comme pour l'ellipse. Les formules

$$r_1^2 = (ex + a)^2, \quad r_2^2 = (ex - a)^2$$

donnant les carrés des longueurs des rayons focaux restent entières, ainsi que leur démonstration. Mais l'extraction des racines devient une opération délicate parce que $|ex| > |x| \geqslant a$ pour l'hyperbole. Donc

$$r_1 = \begin{cases} a + ex & \text{pour } x > 0, \\ -a - ex & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

et

$$r_2 = \begin{cases} -a + ex & \text{pour } x > 0, \\ a - ex & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a & \text{pour } x > 0, \\ -2a & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

i.e. quel que soit x, on a

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Inversement, si la différence des distances d'un point $M(x, y)$ aux foyers est $2a$ en valeur absolue, i. e. si

$$\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

on obtient la relation (4) par des transformations quasi identiques à celles du cas de l'ellipse. Ainsi, *l'hyperbole* (4) *est le lieu géométrique des points tels que la différence de leurs distances aux foyers soit égale à* $2a$ *en valeur absolue* (*propriété focale de l'hyperbole*). □

On déduit des formules donnant r_1 et r_2 comme pour l'ellipse que *l'hyperbole est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances au foyer et à la directrice correspondante est égal à* e.

Ainsi, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont construites de façon analogue, la seule différence étant la grandeur de l'excentricité e.

LEÇON 18

Equations des ellipses, des paraboles et des hyperboles rapportées au sommet.— Coordonnées polaires.— Equations des ellipses, des paraboles et des hyperboles en coordonnées polaires.— Ellipses, paraboles et hyperboles affines.— Courbes algébriques.— Courbes du second degré et difficultés associées.— Géométrie affine complexe et sa déficience.

L'unité intrinsèque de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole peut être révélée d'une autre manière.

Soit une hyperbole quelconque

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

dont l'équation en coordonnées

$$x' = x - a, \quad y' = y$$

obtenues par transport de l'origine des coordonnées canoniques au sommet de droite s'écrit

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

i. e. on a en supprimant les accents

$$y^2 = 2px + qx^2, \tag{1}$$

où $q = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 > 0$ (et $p = \frac{b^2}{a}$ comme plus haut).

S'agissant de l'ellipse et de son sommet de gauche $(-a, 0)$, la transformation décrite aboutit encore à l'équation (1), où

$$q = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1,$$

i.e. $-1 \leqslant q < 0$.

Si $q = 0$, l'équation (1) devient l'équation canonique de la parabole.

Ainsi, *les trois courbes considérées sont données par l'équation* (1), $p > 0$, avec $q > 0$ pour l'hyperbole, $q = 0$ pour la parabole et $-1 \leqslant q < 0$ pour l'ellipse (le cas $q = -1$ correspond à la circonférence).

Si q varie et p reste constant, on obtient pour q très important une hyperbole « grande ouverte » dont les branches avoisinent l'axe des ordonnées. Avec q diminuant, les branches s'aplatissent et la

branche de gauche s'écarte de plus en plus de l'axe des y (le sommet de gauche a $-2p/q$ pour abscisse) pour s'éloigner à l'infini quand $q = 0$, la branche de droite devenant une parabole. Si q continue de décroître, la parabole se transforme en une ellipse très allongée (dont le sommet de droite est le point d'abscisse $-2p/q$), puis en une circonférence (quand $q = -1$).

Il y a intérêt à examiner l'équation (1) pour $q < -1$. On introduit les coordonnées

$$x' = y, \quad y' = x + \frac{p}{q}.$$

En ces coordonnées, la courbe (1) a pour équation (on supprime une fois de plus les accents)

$$x^2 = 2p\left(y - \frac{p}{q}\right) + q\left(y - \frac{p}{q}\right)^2,$$

i.e.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où $a^2 = -p^2/q$, $b^2 = p^2/q^2$. Puisque $b < a$, il s'agit de l'équation canonique de l'ellipse qui est cette fois allongée le long de l'ancien axe des ordonnées. Son paramètre est $p/\sqrt{-q}$, et son excentricité est égale à $\sqrt{1 + q^{-1}}$.

On voit que lorsque q varie de -1 à $-\infty$, la circonférence s'allonge dans la direction de l'ancien axe des ordonnées, et elle se réduit à un point « à la limite » pour $q \to -\infty$.

On observe que la variation décrite de q s'accompagne d'un changement de paramètre (qui est $p/\sqrt{-q}$ pour $q < -1$). Aussi on n'obtient pas de parabole (bien que $e \to 1$) pour q tendant vers $-\infty$ parce que le paramètre a 0 pour limite.

* * *

Aux termes de la première loi de Kepler, les planètes se meuvent suivant des ellipses (et les comètes suivant des paraboles et des hyperboles) dont l'un des foyers est le Soleil. Il y a donc avantage à définir ces courbes remarquables en *coordonnées polaires*.

Les coordonnées polaires sont déterminées en fixant

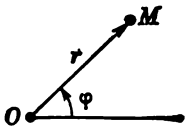
a) une orientation du plan (en général dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre),

b) un point O, appelé *pôle*,

c) une droite orientée passant par O (*axe polaire*). L'axe polaire est en général horizontal, le sens de parcours allant de gauche à droite.

Le plan et l'axe polaire étant orientés, on associe à chaque vecteur $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ un seul « angle orienté » φ entre $\mathbf{r}$ et l'axe, qui varie dans

$(-\pi, +\pi]$. Selon que $\mathbf{r}$ a la direction de l'axe ou la direction opposée, on a $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. Si $\mathbf{r}$ est dans le demi-plan positif, alors $0 < \varphi < \pi$, et s'il s'agit du demi-plan négatif, on a $-\pi < \varphi < 0$.



Le vecteur $\mathbf{r}$ est bien défini par sa longueur r et l'angle φ. Les nombres r et φ pour $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ s'appellent les *coordonnées polaires* du point M (r est le *rayon vecteur* et φ *l'angle polaire*). Quand $M = 0$, l'angle φ prend toutes les valeurs possibles (et $r = 0$).

Si x et y sont des coordonnées rectangulaires *compatibles* avec les coordonnées polaires r, φ, i.e. si

a) leur donnée détermine l'orientation donnée du plan;

b) elles ont le point O pour origine;

c) elles ont pour axe des x l'axe polaire,

alors

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

et

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(il est clair que deux dernières équations définissent bien l'angle φ).

Soit

$$y^2 = 2px \tag{2}$$

une parabole quelconque. Selon la propriété connue de la parabole, son point quelconque est distant du foyer de $r = x + p/2$. Or, cette distance est le rayon vecteur du système de coordonnées polaires compatibles avec les coordonnées rectangulaires $x - p/2$, y qui s'obtiennent des coordonnées canoniques par transport de l'origine au foyer. Donc

$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi.$$

Cette relation jointe à $r = x + p/2$ donne

$$r - p = r\cos\varphi,$$

i.e.

$$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}. \tag{3}$$

Inversement, si l'on a (3) et $x - p/2 = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, alors

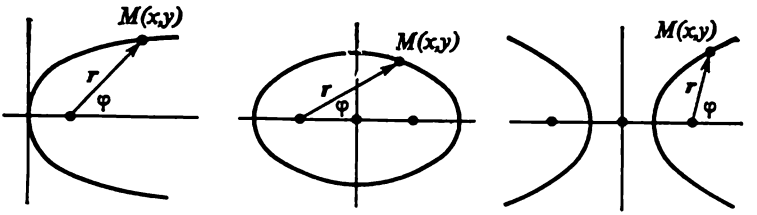
$$x + \frac{p}{2} = r\cos\varphi + p = r,$$

si bien qu'en vertu de la propriété mentionnée, le point $M(x, y)$ est sur la parabole (2). Ainsi, la relation (3) est l'équation de la parabole considérée rapportée aux coordonnées polaires r, φ.

Plaçons-nous dans le cas de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a \geqslant b > 0, \tag{4}$$

et faisons confondre le pôle avec le foyer de gauche et l'axe polaire avec l'axe des abscisses. Les coordonnées rectangulaires compatibles



avec r, φ sont $x+c$, y, et on a en particulier $x+c=r\cos\varphi$. D'autre part, le rayon vecteur est le rayon focal de gauche $r_1 = a+ex$, si bien que

$$r=a+e(-c+r\cos\varphi)=p+er\cos\varphi$$

(car $a-ec=p$), i.e.

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}. \tag{5}$$

Inversement, soit (5) et $x+c=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Alors

$$x+\frac{a}{e}=-c+r\cos\varphi+\frac{a}{e}=\frac{p+er\cos\varphi}{e}=\frac{r}{e},$$

et le point $M(x, y)$ appartient donc à l'ellipse (4) (propriété analogue à la propriété mentionnée de la parabole). Ainsi, l'ellipse (4) est définie en coordonnées polaires r, φ par l'équation (5).

Soit maintenant l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>0, \quad b>0. \tag{6}$$

On transfère le pôle au foyer de droite $(c, 0)$ et on ne prend que la branche de droite $(x>0)$. On a

$$r=ex-a$$

$$x-c=r\cos\varphi,$$

d'où

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}. \tag{7}$$

Inversement, cette équation entraîne pour $x=c+r\cos\varphi>0$ et $y=r\sin\varphi$ l'égalité (6) (si l'on se rappelle la propriété « le rapport des distances au foyer et à la directrice correspondante est égal à une

constante »). Ainsi, la branche de droite de l'hyperbole (6) se définit en coordonnées polaires r, φ par l'équation (7).

On dit donc que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole (plus précisément, une branche de l'hyperbole) *sont définies en coordonnées polaires par la même équation*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{8}$$

ce qui souligne une fois de plus l'unité intrinsèque de ces courbes.

Ceci étant, le pôle se confond, ou bien avec le foyer (cas parabole), ou bien avec le foyer relatif à la branche (cas branche de l'hyperbole), ou bien avec un foyer quelconque (cas ellipse). L'axe polaire est dans tous les cas l'axe focal. La courbe est orientée soit de manière canonique (la parabole), soit de façon que le foyer donné suit le sommet correspondant (la branche de l'hyperbole et l'ellipse). Quant à l'orientation du plan, elle est sans importance. Ainsi, l'équation (8) définit la parabole et l'hyperbole dans deux systèmes de coordonnées polaires (qui diffèrent par l'orientation du plan, i.e. par le signe de l'angle φ). Il y en a quatre pour l'ellipse (qui diffèrent en outre par le foyer pris pour pôle). Cela tient à ce que l'ellipse possède deux axes de symétrie, tandis que la parabole et la branche de l'hyperbole n'en ont qu'un.

* * *

On passe du plan euclidien au plan affine, i.e. on revient à la géométrie affine.

On rappelle que tout plan euclidien est affine et qu'on transforme tout plan affine en le plan euclidien, et cela de diverses manières. Autrement dit, on munit le plan affine d'une structure euclidienne. En particulier, on transforme tout système de coordonnées affines donné à l'avance en le système euclidien de coordonnées rectangulaires.

Définition 1. On appelle *ellipse affine* une courbe du plan affine si l'on définit sur ce plan une structure euclidienne par rapport à laquelle la courbe donnée est l'ellipse au sens de la définition 2 de la leçon 17. On définit de même la *parabole affine* et l'*hyperbole affine*.

Ainsi, une courbe du plan affine est l'ellipse s'il existe des coordonnées x, y telles que l'équation de la courbe soit de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En passant aux coordonnées

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b},$$

cette équation s'écrit (après avoir supprimé les accents)

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{9}$$

Ainsi, *pour toute ellipse affine il existe un système de coordonnées affines x, y tel que son équation ait la forme* (9). Cette équation et les coordonnées associées seront dites *affines canoniques*.

Si l'on munit le plan affine d'une structure euclidienne pour laquelle les coordonnées affines canoniques sont rectangulaires, on obtient une circonférence de rayon 1 (« circonférence unité »). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe du plan affine soit l'ellipse est que le plan affine soit structuré en plan euclidien dans lequel cette courbe soit la circonférence unité.

De même, on trouve pour toute hyperbole et toute parabole des coordonnées affines par rapport auxquelles la première courbe est l'« hyperbole unité », i.e. elle a pour équation

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et la seconde est la « parabole unité »

$$y^2 = 2x.$$

Ces équations et les coordonnées correspondantes sont elles aussi *affines canoniques*.

* * *

On rappelle la définition d'un polynôme à deux indéterminées. On appelle *polynôme* à deux indéterminées x, y, et on note $F(x, y)$ la somme des *monômes* de la forme ax^py^q, avec a un nombre. Si $a \neq 0$, on dit que le monôme ax^py^q *figure* dans le polynôme donné. Le *degré de* ax^py^q est par définition le nombre $p + q$, et le *degré du polynôme* $F(x, y)$ est le plus grand des degrés de ses monômes.

Il est clair que dans tout changement linéaire inversible d'indéterminées, i.e. une transformation

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13},$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23},$$

avec

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

le polynôme à x, y devient le polynôme de *même degré* à x', y' (le degré ne peut ni augmenter ni décroître; la dernière propriété est déterminée par l'inversibilité).

Définition 2. On appelle *courbe algébrique de degré n* du plan affine (ou euclidien) un ensemble de points de coordonnées x, y telles qu'on ait dans un système de coordonnées affines (donc dans un système quelconque de coordonnées affines):

$$F(x, y) = 0, \tag{10}$$

$F(x, y)$ étant un polynôme de degré n. Cette relation porte le nom d'*équation* de la courbe algébrique.

Le peu d'élégance de cette définition provient de notre désir d'éviter certains termes (voir p. 138).

La définition 2 est, on ne l'oubliera pas, à l'origine de nombreuses difficultés. Il se peut par exemple qu'une même courbe repérée par un même système de coordonnées soit définie par deux équations non proportionnelles ayant éventuellement des degrés différents. On ne parle donc pas du degré d'une courbe algébrique qu'après avoir choisi son équation (10).

Les *courbes du premier degré* sont définies par les équations

$$Ax + By + C = 0,$$

où au moins l'un des coefficients A, B est non nul. On sait (voir leçon 6) que ces courbes sont exactement les droites et elles seulement.

Les *courbes du second degré* sont décrites par les équations

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{11}$$

où au moins l'un des coefficients a_{11}, a_{12}, a_{22} est non nul.

Exemples de courbes du second degré :

[1] *Ellipse* :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

[2] *Ellipse imaginaire* :

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

[3] *Deux droites sécantes imaginaires* :

$$x^2 + y^2 = 0.$$

[4] *Hyperbole* :

$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

[5] *Deux droites sécantes* :

$$x^2 - y^2 = 0.$$

[6] *Parabole* :

$$y^2 - 2x = 0.$$

[7] *Deux droites parallèles distinctes* :

$$y^2 - 1 = 0.$$

[8] *Deux droites parallèles imaginaires* :

$$y^2 + 1 = 0.$$

[9] *Deux droites confondues* :

$$y^2 = 0.$$

Définition 3. Neuf équations ci-dessus sont les *équations affines canoniques* des courbes du second degré.

Les appellations des courbes [1], [4], [5], [6], [7] sont compréhensibles (encore que la notion de deux droites sécantes ne s'accorde pas très bien avec l'idée intuitive qu'on a d'une courbe). Quant à la courbe [9], il s'agit là d'une convention pure et simple qui n'a d'autre but que de nous rappeler que l'équation correspondante est de degré 2, car cette courbe est en fait une droite (en tant qu'un ensemble de points). Il en est de même des autres « courbes » dont les noms servent uniquement à révéler la ressemblance de leur équation avec l'équation de la courbe « réelle » correspondante. En effet, la courbe [2] est un ensemble vide, [3] se réduit à un point, et la courbe [8] est encore un ensemble vide.

On voit que l'interprétation algébrique des courbes de degré 2 et leur interprétation géométrique ne sont pas adéquates; par passage des équations aux courbes, les analogies algébriques se perdent et le tableau général s'estompe (il suffit de dire par exemple que des équations différentes définissent en tant que courbe un même ensemble vide).

Il serait bon d'améliorer la « géométrie » pour qu'elle soit une réplique fidèle de l'« algèbre »

* * *

A cet effet, il faut bien sûr introduire les points « imaginaires » de coordonnées complexes (non réelles en général). Il paraît de prime abord qu'on dispose de toutes les notions nécessaires. En effet, la notion d'espace vectoriel a un sens pour tout corps de base $\mathbb{K}$, en particulier pour le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (nous en avons parlé plus d'une fois). Dans les axiomes 10°, 11° de l'espace affine, le corps de base ne figure que de façon indirecte, et on définit la notion d'*espace affine sur* $\mathbb{K}$ (resp. notion d'*espace affine complexe*) si l'on suppose dans ces axiomes l'espace vectoriel associé $\mathcal{T}$ être un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (resp. $\mathbb{C}$). La théorie affine (sauf l'orientation) reste en vigueur pour $\mathbb{K}$ quelconque, ce qui n'est pas le cas de la géométrie euclidienne vu que l'axiome de positivité (axiome 15°) n'a de sens que pour le corps $\mathbb{R}$.

Mais l'interprétation des courbes de degré 2 par la géométrie affine complexe a ses inconvénients. Le changement complexe de coordonnées $x' = x$, $y' = iy$ transforme par exemple la courbe [1] en la courbe [2]. Or, ces courbes sont différentes du point de vue algébrique comme du point de vue géométrique.

Le fait est qu'en géométrie complexe la notion de point « réel » est dépourvue de sens (cette géométrie ignore les points privilégiés). Or, si l'on veut garder contact avec la géométrie, on doit savoir distinguer les points usuels (« réels ») d'avec les points nouveaux (« imaginaires ») qu'on introduit uniquement pour faire face aux

exigences de l'algèbre. Aussi les coordonnées ont beau prendre toutes les valeurs complexes, les coefficients des formules de passage d'un système de coordonnées à un autre doivent être réels (sinon un point de coordonnées réelles risque de devenir un point « imaginaire » et vice versa).

L'axiomatisation correspondante sera effectuée dans la leçon suivante.

LEÇON 19

Espaces vectoriels réels-complexes.— Dimension des ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espaces vectoriels.— Isomorphisme de ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espaces vectoriels.— Complexification.— Espaces affines réels-complexes.— Complexification. — Espaces euclidiens réels-complexes.— Courbes du second degré sur $\mathbb{R}$, réelles et imaginaires.

Définition 1. On appelle *réel-complexe* un espace vectoriel $\mathscr{V}$ complexe (i.e. sur le corps $\mathbb{C}$) dans lequel on a défini une partie $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ de *vecteurs réels* qui jouit des propriétés suivantes (les axiomes de ce livre sont numérotés de façon continue):

16° Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, alors $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.

17° Si $\mathbf{a} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, alors $k\mathbf{a} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ pour tout nombre réel k.

18° Quel que soit le vecteur $\mathbf{c} \in \mathscr{V}$, il existe des vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ tels que

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}. \tag{1}$$

19° Si $\mathbf{a} + i\mathbf{b} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, alors $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

* * *

L'axiome 19° entraîne l'unicité de la décomposition (1) prévue par 18°. Le vecteur $\mathbf{a}$ de (1) est par définition la *partie réelle* de $\mathbf{c}$ et se note Re $\mathbf{c}$. De même, le vecteur $\mathbf{b}$ est la *partie imaginaire* de $\mathbf{c}$, la notation correspondante étant Im $\mathbf{c}$. L'axiome 18° s'écrit, par convention, comme la formule mnémonique $\mathscr{V} = \mathscr{V}^{\mathbb{R}} + i\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.

Les axiomes 16° et 17° signifient que $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, d'où son nom de *sous-espace réel* de $\mathscr{V}$.

* * *

Soit n la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$. Puisqu'il s'agit d'un espace sur $\mathbb{R}$, on emploiera la notation $\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.

On a de même pour $\mathscr{V}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$: $\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{V}$.

Proposition 1. *On a l'égalité*

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{V} = \dim_{\mathbb{R}}\mathscr{V}^{\mathbb{R}}.$$

Toute base de $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ est une base de $\mathscr{V}$.

Démonstration. Soient $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une base de l'espace vectoriel $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \in \mathscr{V}$. Si $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n$ et $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + b^n\mathbf{e}_n$, alors $\mathbf{c} = (a^1 + ib^1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (a^n + ib^n)\mathbf{e}_n$. Par conséquent, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est une famille génératrice dans $\mathscr{V}$.

D'autre part, $(a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n) + i\,(b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + b^n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$ si $c^1\mathbf{e}_1 + \ldots + c^n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, où $c^1 = a^1 + ib^1, \ldots, c^n = a^n + ib^n$. D'après l'axiome 19°, $a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ et $b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + b^n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. Aussi $a^1 = 0, \ldots, a^n = 0, b^1 = 0, \ldots, b^n = 0$, donc $c^1 = 0, \ldots, c^n = 0$. La famille $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est donc libre dans $\mathscr{V}$. □

Les bases de $\mathscr{V}$ qui sont celles de $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ seront dites *réelles*. Elles possèdent la propriété que les coordonnées de $\mathbf{c} \in \mathscr{V}$ dans ces bases sont réelles si et seulement s'il en est ainsi de $\mathbf{c}$.

* * *

L'exemple d'un $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-espace vectoriel est $\mathbb{C}^n$ dont les vecteurs réels sont des suites de nombres réels. On a

$$(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n.$$

Définition 2. Deux espaces vectoriels réels-complexes $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}_1$ sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$ de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{V}_1$ considérés comme espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ qui applique le sous-espace réel $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ sur le sous-espace réel $\mathscr{V}_1^{\mathbb{R}}$ (et induit donc l'isomorphisme $\mathscr{V}^{\mathbb{R}} \to \mathscr{V}_1^{\mathbb{R}}$).

Les résultats antérieurs autorisent à dire que toute base réelle $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ définit un isomorphisme de l'espace vectoriel réel-complexe $\mathscr{V}$ sur $\mathbb{C}^n$. Comme il fallait s'y attendre, *tous les* $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-*espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes.* □

* * *

On assimile tout espace vectoriel réel-complexe $\mathscr{V}$ à un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ sans préciser si oui ou non ses vecteurs sont réels, i.e. *on fait abstraction de la propriété « être réel »*.

Inversement, on munit chaque espace vectoriel complexe de la propriété « être réel » en choisissant une base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ quelconque et en qualifiant de réels les vecteurs qui ont, dans cette base, leurs coordonnées réelles. Il est clair qu'on vérifie dans ce cas les axiomes 16° à 19°.

S'agissant de deux bases distinctes, on aboutit par ce procédé à un même $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-espace si et seulement si la matrice associée au changement de base est réelle (i.e. elle a pour éléments des nombres réels).

Un résultat plus intéressant est qu'*à tout espace vectoriel réel* $\mathscr{W}$ *il correspond un* $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-*espace* $\mathscr{V}$ *tel que son sous-espace réel* $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ *soit identique* à $\mathscr{W}$ (plus précisément, $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{W}$). La construction de $\mathscr{V}$ est complètement analogue à celle du corps des nombres complexes (et elles coïncident pour $\mathscr{W} = \mathbb{R}$).

On prend pour vecteurs de $\mathscr{V}$ les couples $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, où $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{W}$. L'addition est définie par

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}_1, \mathbf{b} + \mathbf{b}_1)$$

et la multiplication par des nombres complexes moyennant l'égalité

$$(k + il)\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (k\mathbf{a} - l\mathbf{b},\ k\mathbf{b} + l\mathbf{a}).$$

On vérifie automatiquement qu'on aboutit à $\mathcal{V}$ sur le corps $\mathbb{C}$.

Il suffit, pour transformer $\mathcal{V}$ en un $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-espace, d'affirmer que les couples $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ constituent des vecteurs réels. (Les axiomes 16° à 19° sont automatiquement satisfaits; par exemple, l'axiome 17° découle de $k\mathbf{b} + l\mathbf{a} = \mathbf{0}$ pour $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $l = 0$, et l'axiome 18° de $(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = i\,(\mathbf{b}, \mathbf{0})$.) On identifie chaque couple $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ avec $\mathbf{a} \in \mathcal{W}$ correspondant et on a $\mathcal{W} = \mathcal{V}^{\mathbb{R}}$. □

On appelle *complexifié* de $\mathcal{W}$, et on note $\mathcal{W}^{\mathbb{C}}$, l'espace $\mathcal{V}$ ainsi obtenu.

* * *

On aborde maintenant les espaces ponctuels.

Définition 3. On appelle *espace affine réel-complexe* un espace affine complexe $\mathcal{A}$ tel que

a) on ait fixé dans $\mathcal{A}$ une partie $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}$ dont les éléments sont par définition les *points réels*;

b) l'espace vectoriel associé $\mathcal{V}$ soit un $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-espace,

les axiomes suivants ayant lieu:

20° Quels que soient deux points réels A, $B \in \mathcal{A}^{\mathbb{R}}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est réel:

$$A,\ B \in \mathcal{A}^{\mathbb{R}} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}^{\mathbb{R}}.$$

21° Si le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont réels, il en est de même du point B:

$$A \in \mathcal{A}^{\mathbb{R}},\quad \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}^{\mathbb{R}} \Rightarrow B \in \mathcal{A}^{\mathbb{R}}.$$

L'axiome 21° (et 17°) entraîne que le caractère réel de B et de $\overrightarrow{AB}$ implique celui de A (il suffit de passer au vecteur $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$).

Les axiomes 20° et 21° signifient que $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}$ est un espace affine réel attaché à l'espace vectoriel $\mathcal{V}^{\mathbb{R}}$. Il s'appelle le *sous-espace réel* de l'espace affine réel-complexe $\mathcal{A}$. Sa dimension (« réelle ») est égale à la dimension (« complexe ») de $\mathcal{A}$.

Un repère $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ de l'espace $\mathcal{A}$ est dit *réel* s'il en est de même de l'origine O et de la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. On caractérise ces repères par la propriété, pour les coordonnées d'un point de $\mathcal{A}$, d'être réelles dans ces repères si et seulement si le point est réel.

Deux points d'un espace affine réel-complexe $\mathcal{A}$ sont dits *complexes conjugués* si leurs coordonnées dans un (donc dans tout) repère réel sont complexes conjuguées.

On définit de façon évidente l'isomorphisme d'espaces affines réels-complexes. *Tout les espaces affines réels-complexes de même dimension sont isomorphes*, comme il fallait s'y attendre.

* * *

Tout ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espace affine peut être assimilé à un espace affine sur $\mathbb{C}$ si l'on fait abstraction de son caractère réel. Inversement, si l'on prend un repère $Oe_1 \ldots e_n$ quelconque et si l'on qualifie de réel tout point et tout vecteur dont les coordonnées sont réelles dans ce repère, on transforme tout espace affine complexe en un ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espace. Ceci étant, deux repères distincts fournissent un même espace si et seulement si les formules de transformation des coordonnées sont à coefficients réels.

Comme pour les espaces vectoriels, ou peu s'en faut, on démontre qu'*il correspond à tout espace affine réel $\mathscr{B}$ un espace affine réel-complexe $\mathscr{A} = \mathscr{B}^{\mathbb{C}}$* (qui en est le *complexifié*) *tel que $\mathscr{A}^{\mathbb{R}} = \mathscr{B}$*. On prend pour points de $\mathscr{A}$ les couples (A_1, A_2) de points de $\mathscr{B}$. On considère comme espace vectoriel attaché $\mathscr{V}$ le complexifié $\mathscr{W}^{\mathbb{C}}$ de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$ associé à $\mathscr{B}$ et on définit le vecteur $\overrightarrow{(A_1, A_2)(B_1, B_2)}$ par la formule

$$\overrightarrow{(A_1, A_2)(B_1, B_2)} = (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}).$$

Il est clair qu'on respecte ainsi les axiomes 10° et 11° des espaces affines. Pour munir les espaces obtenus d'une structure de ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espace on choisit dans $\mathscr{B}$ un point $\mathbf{0}$ quelconque et on dit que les couples $(A, \mathbf{0})$, $A \in \mathscr{B}$, sont des points réels de $\mathscr{A}$. Alors les axiomes 20° et 21° ont lieu, et $\mathscr{A}^{\mathbb{R}} = \mathscr{B}$ par identification de $(A, \mathbf{0})$ et A. □

* * *

On introduit enfin les ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espaces munis d'une structure euclidienne.

Définition 4. Un espace réel-complexe, vectoriel ou affine, est dit *euclidien* si l'on définit sur son sous-espace réel une structure euclidienne.

Dans cet espace, les formules des longueurs (des distances) et des angles s'appliquent à des objets non réels. Bien que le passage au domaine non réel ne conduit à aucune théorie (usuelle) satisfaisante (par exemple, la longueur d'un vecteur $\neq 0$ peut être nulle), il y a des fois intérêt à le faire.

* * *

Revenons au cas $n = 2$, i.e. au plan affine (ou euclidien) réel-complexe.

Définition 5. On dit d'une courbe algébrique du plan réel-complexe qu'elle est *réelle* si elle est définie dans un (donc dans tout) repère réel par une équation dont le premier membre est un polynôme à coefficients réels.

Les courbes réelles au sens de cette définition sont également dites *définies sur* $\mathbb{R}$.

Une *courbe réelle du second degré* est par exemple nécessairement décrite par une équation (11) de la leçon 18 qui a tous ses coefficients a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} réels. Toutes les équations affines canoniques [1] à [9] de la même leçon définissent des courbes réelles.

Les noms des courbes (excepté [9] bien sûr) s'interprètent maintenant de façon exhaustive. Dire qu'une courbe est « imaginaire » c'est dire tout simplement qu'elle ne coupe pas le demi-espace réel (ou qu'elle a un point commun unique avec ce demi-espace (cas [3])). Les courbes « non imaginaires » seront dites *réelles*. Ainsi, le terme « courbe réelle » * désigne soit une courbe définie sur $\mathbb{R}$, soit une courbe non imaginaire.

Chose à noter, les ellipses réelles [1] et les ellipses affines au sens de la définition 1 de la leçon 18 sont en fait des êtres différents car les premières possèdent des points non réels, et les secondes étant par définition des courbes du plan réel en sont nécessairement dépourvues. Mais les ellipses affines sont les intersections des ellipses réelles et du plan réel, si bien que celles-ci admettent, on le verra plus loin, des asymptotes (ce sont les droites imaginaires $y = \pm ix$ pour l'ellipse $x^2 + y^2 = 1$) encore que les ellipses affines n'en possèdent évidemment pas.

La situation est la même pour les autres courbes réelles de la liste mentionnée (i.e. les paraboles, les hyperboles et les couples de droites réelles).

Notre but immédiat est de démontrer que toute courbe réelle du second degré dans le plan réel-complexe est l'une des courbes [1] à [9] et une seule. Pour le faire, nous développerons de façon suffisamment complète dans les leçons suivantes la théorie générale de ces courbes.

---

* Dans le texte russe on a deux termes différents. (*N.d.T.*)

LEÇON 20

Préliminaires.— Centre d'une courbe du second degré.— Centres de symétrie.— Courbes à centre.— Droites de direction non asymptotique.— Tangentes.— Droites de direction asymptotique.

La théorie élémentaire des courbes du second degré est indépendante du corps de base $\mathbb{K}$ (on demande seulement que $\mathbb{K}$ soit de caractéristique $\neq 2$). S'agissant des propriétés plus fines, on se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i.e. dans le plan affine complexe. Pour rester dans l'univers sensible, on considère ce plan comme étant réel-complexe, si bien qu'on a affaire soit au cas $\mathbb{C}$, soit au cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ (où l'on se limite des fois au plan réel (cas $\mathbb{R}$)).

Dans cette leçon, on désigne par x, y des coordonnées affines quelconques mais fixes. Dans le cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, on fait naturellement l'hypothèse de x, y réelles, i.e. ce sont des nombres réels pour des points réels.

Toutes nos affirmations porteront, sauf indication contraire, sur une courbe fixe du second degré

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

En théorie générale des courbes de degré 2 sur $\mathbb{K}$ quelconque de caractéristique $\neq 2$, les coefficients de cette équation peuvent être des nombres quelconques de $\mathbb{K}$, mais au moins l'un des coefficients a_{11}, a_{12}, a_{22} est évidemment non nul. Dans le cas particulier $\mathbb{C}$, ils sont des nombres complexes arbitraires. Nous les supposerons réels pour $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.

Afin de symétriser les formules, on introduit les coefficients a_{21}, a_{31}, a_{32} qui sont par définition

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}.$$

La première chose à établir est la variation des coefficients de (1) par transport de l'origine en un point M_0 (x_0, y_0) quelconque, i.e. par passage aux coordonnées

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0.$$

On fait l'hypothèse de $\mathbb{K}$ quelconque (de caractéristique différente de 2).

On désigne le premier membre de (1) par $F(x, y)$ et on obtient l'équation de la courbe considérée en coordonnées x', y'

$$F(x' + x_0, y' + y_0) = 0.$$

Soit

$$F(x' + x_0, y' + y_0) = \\ = a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33}.$$

Il est immédiat de vérifier que

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},$$

$$(2) \qquad a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23},$$

$$a'_{33} = F(x_0, y_0).$$

En particulier, le transport de l'origine laisse invariants les coefficients des termes de degré 2.

Définition 1. Un point $M_0(x_0, y_0)$ s'appelle le *centre* de la courbe (1) si

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

i.e. si avec le transfert de l'origine en $M_0(x_0, y_0)$, l'équation (1) perd les termes du premier degré.

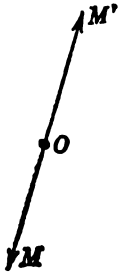
Cette définition laisse à désirer. En effet, elle est rapportée à l'équation donnée (1). Rien ne garantit donc pour le moment qu'on aboutit aux formules (3) si la courbe repérée par les mêmes coordonnées se définit par une autre équation, i.e. on ne sait pas si la définition ci-dessus est correcte. On n'a en réalité aucune raison d'en douter, mais on n'est pas à même de le démontrer de façon exhaustive.

Le seul cas susceptible d'une étude immédiate est celui où la courbe (1) « n'est pas en ligne droite », i.e. elle contient au moins trois points non colinéaires. Il se trouve que les centres de (1) sont caractérisés de façon géométrique pure sans faire recours à son équation. S'agissant de ces courbes, la définition 1 est donc correcte.

* * *

Faisons une remarque préliminaire. On définit de façon correcte la symétrie centrale dans tout espace affine sur un corps quelconque (ce qui n'est pas vrai de la symétrie axiale). On dit que le point M' est le transformé d'un point M par la *symétrie de centre* O (ou par rapport à O) si $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ (v. au verso). Le point O est le *centre de symétrie* d'un ensemble (disons, d'une ligne) si, chaque fois que l'ensemble contient le point M, il contient son symétrique M'. L'origine des coordonnées O est centre de symétrie de la courbe $F(x, y) = 0$ si et seulement si $F(x, y) = 0$ implique $F(-x, -y) = 0$.

Il en résulte de suite que *tout centre de la courbe* (1) *est son centre de symétrie* (ce qui explique en particulier l'appellation « centre »). En effet, si la courbe (1) a son centre à l'origine, i.e. si l'équation (1) n'a pas de termes linéaires, alors on a l'identité $F(-x, -y) = F(x, y)$, c.q.f.d. □



Inversement, si l'origine est confondue avec le centre de symétrie de (1), alors tout point $M(x, y)$ de la courbe vérifie, en plus de $F(x, y) = 0$, l'égalité $F(-x, -y) = 0$, donc $F(x, y) - F(-x, -y) = 0$, ou encore

$$a_{13}x + a_{23}y = 0. \tag{4}$$

Cette équation signifie pour $a_{13} \neq 0$ ou $a_{23} \neq 0$ que le point $M(x, y)$ appartient à la droite (4), si bien que la courbe (1) se confond avec cette droite. Ainsi, *si la courbe* (1) *n'est pas alignée, son centre de symétrie quelconque est son centre.* □

S'agissant de (1) non confondue avec une droite, les centres sont donc exactement les centres de symétrie. Par conséquent, la définition 1 est correcte pour ces courbes.

Dans le cas général, elle dépend formellement du choix de l'équation (1) (ne pas oublier!).

* * *

Généralement, les relations (3) signifient que les centres de la courbe (1) sont des points communs des droites

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \text{ et } a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \tag{5}$$

Trois cas peuvent se présenter : 1) il n'y a pas de centre (les droites (5) sont parallèles) ; 2) il y a un centre unique (les droites (5) sont sécantes) ; 3) il y a une infinité de centres en ligne droite (les droites (5) se confondent). Il se peut que l'une des équations (5) soit vérifiée identiquement ou qu'il y ait incompatibilité, i.e. elle n'est vraie pour aucun point du plan (c'est justement le cas de la première équation pour $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} \neq 0$). Mais cela n'altère nullement la généralité des affirmations (on est dans le cas 3) pour une équation vérifiée identiquement et dans le cas 1) s'il y a incompatibilité). Ainsi, toute courbe (1) jouit de l'une des propriétés suivantes :

I. Elle possède un centre unique.
II. Elle n'a pas de centre.
III. Elle possède une ligne des centres.

Définition 2. Une courbe (1) ayant un centre unique s'appelle *courbe à centre.*

Selon le théorème sur la position relative de deux droites dans le plan (leçon 6), le cas I a lieu si $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$, i.e. si $a_{11}a_{22} -$

$-a_{21}^2 \neq 0$, le cas II si $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$ et le cas III pour $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$. Il y a intérêt à écrire ces conditions au moyen des déterminants

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

de l'équation (1).

Puisque $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, on a $\delta \neq 0$ (cas I) ou $\delta = 0$ (cas restants). En outre $\Delta = 0$ dans le dernier cas (ses deux premières lignes sont proportionnelles). Inversement, soit $\Delta = 0$ et $\delta = 0$. On développe Δ suivant la dernière colonne, il vient

$$\Delta = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

où le dernier déterminant est $\delta = 0$. L'égalité $\delta = 0$ entraîne de plus qu'il existe un nombre k tel que $a_{11} = ka_{21}$, $a_{12} = ka_{22}$, donc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ainsi,

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

pour $\delta = 0$. Aussi $\Delta = 0$ entraîne soit $a_{13} = ka_{23}$ (et, partant, la proportionnalité de deux premières lignes de Δ), soit $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$, si bien qu'on trouve un nombre l tel que $a_{31} = la_{12}$, $a_{32} = la_{22}$, donc $a_{31} = la_{12} = lka_{22} = ka_{32} = ka_{23}$, ce qui signifie une fois de plus la propriété mentionnée de deux premières lignes de Δ. Ainsi, le cas III a lieu si et seulement si $\delta = 0$ et $\Delta = 0$. La variante $\delta = 0$ et $\Delta \neq 0$ caractérise donc le cas II.

Résumons les résultats obtenus sous forme de

Théorème 1 (des centres). *Une courbe du second degré est une courbe à centre si et seulement si* $\delta \neq 0$.

Une courbe du second degré n'a pas de centre si et seulement si $\delta = 0$ *et* $\Delta \neq 0$.

Une courbe du second degré a une ligne des centres si et seulement si $\delta = 0$ *et* $\Delta = 0$.□

On complète dans un sens le théorème si l'on interprète la condition $\Delta = 0$. Lorsque $\delta = 0$, la réponse est donnée par le théorème même ($\Delta = 0$ équivaut à l'existence d'une ligne des centres), si bien qu'on se borne au cas $\delta \neq 0$.

Proposition 1. *Etant donné* $\delta \neq 0$, *on a* $\Delta = 0$ *si et seulement si la courbe* (1) *contient son centre.*

Démonstration. Supposons que le centre $M_0(x_0, y_0)$ de (1) appartient à cette courbe. Ses coordonnées vérifient les équations (3) et l'égalité (1), avec $x = x_0$, $y = y_0$. On fait le produit de la première égalité (3) par x_0, de la seconde par y_0 et on les soustrait de (1), il vient évidemment

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0.$$

Cette relation jointe à (3) signifie que les nombres x_0, y_0, 1 constituent une solution non triviale du système d'équations homogènes

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0,$$

dont le déterminant Δ est donc nul. On observe que nos raisonnements ne se sont pas appuyés sur l'hypothèse $\delta \neq 0$.

Inversement, soit $\Delta = 0$. Le système écrit possède une solution non triviale x_0, y_0, z_0, et $z_0 \neq 0$ car $\delta \neq 0$. On estime donc sans restreindre la généralité que $z_0 = 1$. Les deux premières équations du système montrent que $M_0(x_0, y_0)$ est le centre de la courbe (1). D'autre part, si l'on pose dans ces équations $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 1$, la somme de la première équation multipliée par x_0, de la deuxième multipliée par y_0 et de la troisième est évidemment l'égalité (1) (où $x = x_0$, $y = y_0$). Par conséquent, le centre $M_0(x_0, y_0)$ est sur la courbe (1). □

Exemples. Cherchons les centres des courbes [1] à [9].

[1] Ellipse réelle: $\delta = 1$, $\Delta = -1$. Il y a un centre unique (0, 0).

[2] Ellipse imaginaire: $\delta = 1$, $\Delta = 1$. Il y a un centre unique (0, 0).

[3] Deux droites sécantes imaginaires: $\delta = 1$, $\Delta = 0$. Il y a un centre unique (0, 0).

[4] Hyperbole: $\delta = -1$, $\Delta = 1$. Il y a un centre unique (0, 0).

[5] Deux droites sécantes réelles: $\delta = -1$, $\Delta = 0$. Il y a un centre unique (0, 0).

[6] Parabole: $\delta = 0$, $\Delta = -1$. Il n'y a pas de centre.

[7] Deux droites parallèles réelles: $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Il y a une ligne des centres $y = 0$.

[8] Deux droites parallèles imaginaires: $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Il y a une ligne des centres $y = 0$.

[9] Deux droites confondues: $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Il y a une ligne des centres $y = 0$.

On voit que les courbes à centre de cette liste sont les deux ellipses, l'hyperbole et deux droites sécantes (réelles ou imaginaires).

Le centre de toutes ces courbes est, conformément à la propriété établie plus haut, leur centre de symétrie.

La seule courbe à n'avoir pas de centre est la parabole.

Les courbes possédant une ligne des centres sont deux droites parallèles (réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues).

De toutes les courbes énumérées, la courbe [9] est la seule à être en ligne droite (dans les cas $\mathbb{C}$ et $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$), mais ses centres de symétrie se confondent cependant avec ses centres.

* * *

Proposons-nous d'étudier la position relative de la courbe (1) et d'une droite quelconque

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm. \end{aligned}$$

Les points communs à (1) et à (6) sont définis par $F(x_0 + tl, y_0 + tm) = 0$, i.e. par l'équation

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)\, t^2 + 2\,(a_{11}lx_0 + a_{12}\,(ly_0 + mx_0) + \\ &\qquad + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m)\, t + F(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Définition 3. Si $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0$, on dit que la droite (6) est *de direction non asymptotique* (relativement à la courbe (1)), et si

$$(8)\qquad a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0,$$

cette droite est dite *de direction asymptotique*.

S'agissant d'une droite de direction non asymptotique, (7) est une équation du second degré qui peut, ou bien admettre (dans le corps de base $\mathbb{K}$) deux racines ou une racine (double), ou bien n'avoir pas de racine. Dans le premier cas, la droite (6) coupe la courbe (1) en deux points distincts; dans le deuxième, elles ont un point commun; dans le troisième, elles ne se coupent pas.

Le troisième cas est impossible pour $\mathbb{C}$ et $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, deux points communs du premier étant pour $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ soit réels (et on est dans le premier cas pour $\mathbb{R}$), soit non réels, complexes conjugués (et on est pour $\mathbb{R}$ dans le troisième cas).

* * *

Définition 4. Une droite de direction non asymptotique pour laquelle l'équation (7) admet une racine (double) s'appelle la *tangente* à la courbe (1), et son point associé à la racine (qui est son seul point commun avec la courbe (1)) est par définition le *point de tangence*.

Exemple. On suppose que la courbe (1) est l'ellipse $x^2 + y^2 = 1$

et que le point M_0 (x_0, y_0) de la droite (6) appartient à l'ellipse. L'équation (7) s'écrit

$$(l^2 + m^2)\, t^2 + 2\,(lx_0 + my_0)\, t = 0,$$

et elle possède une racine double si et seulement si $lx_0 + my_0 = 0$, i.e. si $l : m = -y_0 : x_0$. Aussi l'ellipse $x^2 + y^2 = 1$ a comme tangente en son point M_0 (x_0, y_0) la droite

$$x = x_0 - ty_0, \quad y = y_0 + tx_0. \tag{9}$$

Si le plan est euclidien et si l'ellipse est rapportée aux coordonnées x, y rectangulaires (c'est donc la circonférence unité), alors

$$\mathbf{a}\mathbf{r}_0 = (-y_0)\, x_0 + x_0 y_0 = 0,$$

avec $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur du point M_0. Autrement dit, la droite (9) est perpendiculaire au rayon vecteur de M_0 et elle est donc une tangente classique à la circonférence.

On vérifie de même que dans le plan euclidien la tangente à une ellipse, à une hyperbole et à une parabole quelconques en tout point de ces coniques est la tangente définie en analyse comme la limite d'une sécante. Les tangentes aux courbes (1) couples de droites non confondues sont toutes les droites distinctes de celles-ci qui passent par leur point commun. La tangente à la courbe $y^2 = 0$ est toute droite autre que les droites $y = k$.

* * *

S'agissant d'une droite de direction asymptotique, l'équation (7) est du premier degré, et ou bien elle admet une racine (si le coefficient de t est non nul), ou bien elle n'en possède pas (si le coefficient de t est nul, mais le terme constant ne l'est pas), ou bien elle est vérifiée identiquement (si tous les coefficients sont nuls). On a respectivement : 1) la droite (6) coupe la courbe (1) en un point (mais elle n'est pas la tangente!), 2) la droite (6) et la courbe (1) ne se coupent pas, 3) la droite (6) est confondue avec la courbe (1).

On a étudié tous les cas possibles et on voit, en particulier, qu'*une droite ayant trois points communs avec la courbe* (1) *lui appartient tout entière.*

Définition 5. Une droite de direction asymptotique s'appelle l'*asymptote* à la courbe (1) si la droite et la courbe n'ont pas de point commun.

Exemples. L'équation (8) qui définit les directions asymptotiques, s'écrit $l^2 + m^2 = 0$ pour les courbes [1], [2] et [3]. Elle n'admet pas de solution réelle autre que la solution nulle $(l, m) = (0, 0)$ dont nous n'avons pas besoin. Ainsi, ces courbes n'ont pas de directions asymptotiques dans le cas $\mathbb{R}$ et elles en ont deux pour $\mathbb{C}$ et $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, à savoir $1 : i$ et $1 : -i$. Les asymptotes des courbes [1]

et [2] sont les droites $y = ix$ et $y = -ix$, et la courbe [3] (deux droites) n'en possède pas.

Dans les cas [4] et [5], les directions asymptotiques se définissent par $l^2 - m^2 = 0$, et elles sont donc deux (sur tout corps de caractéristique $\neq 2$): $1:1$ et $-1:1$. L'hyperbole (i.e. [4]) a, bien sûr, pour asymptotes les droites $y = x$ et $y = -x$, et deux droites (cas [5]) en sont dépourvues.

L'équation des directions asymptotiques pour les courbes [6], [7], [8] s'écrit $m^2 = 0$, i.e. il y a une direction asymptotique (double) unique $1:0$. La courbe [6] (parabole) n'a pas d'asymptote, et les courbes [7], [8] (deux droites parallèles) admettent comme asymptote toute droite parallèle autre qu'elles-mêmes.

Dans le cas général de la courbe (1) (et du corps $\mathbb{K}$ quelconque), l'équation (8) a 0, 1 ou 2 solutions. Le premier cas (i. e. l'absence de directions asymptotiques) a lieu si et seulement si le corps $\mathbb{K}$ ne contient pas l'élément $\sqrt{-\delta}$, où $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ comme toujours. Si $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$, les solutions sont données par l'une et l'autre formule

$$(10)\qquad \begin{aligned} l : m &= (-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}) : a_{11}, \\ l : m &= a_{22} : (-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}). \end{aligned}$$

Si $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, les formules sont équivalentes, et si $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, on utilise celle qui a un sens. La direction asymptotique unique existe si et seulement si $\delta = 0$.

Plaçons-nous dans le cas ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) (ou $\mathbb{R}$). Tous les coefficients de l'équation (1) sont réels, si bien qu'il en est de même de δ.

Définition 6. La courbe (1) est

$$\left.\begin{array}{l} \textit{du genre ellipse} \\ \textit{du genre hyperbole} \\ \textit{du genre parabole} \end{array}\right\} \text{ si } \left\{\begin{array}{l} \delta > 0, \\ \delta < 0, \\ \delta = 0. \end{array}\right.$$

Une courbe du genre ellipse possède deux directions asymptotiques imaginaires, une courbe du genre hyperbole admet deux directions asymptotiques réelles, et une courbe du genre parabole a une direction asymptotique réelle unique.

On observe que les courbes du genre parabole sont exactement les courbes sans centre ou celles qui en possèdent une infinité en ligne droite.

LEÇON 21

Directions singulières et non singulières.— Diamètres.— Diamètres et centres.— Directions conjuguées et diamètres conjugués.— Simplification de l'équation d'une conique à centre.— Plusieurs précisions nécessaires.— Simplification de l'équation d'une conique qui n'est pas une courbe à centre.

Soit

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

une courbe quelconque du second degré du plan affine.

Quelle que soit la direction $l : m$, les coordonnées x_0, y_0 des points M_0 (x_0, y_0) tels que le coefficient de t de l'équation (7) de la leçon précédente soit nul, vérifient l'égalité

$$(2) \qquad (a_{11}l + a_{12}m)\, x + (a_{12}l + a_{22}m)\, y + (a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Définition 1. Une direction $l : m$ est dite *singulière* si

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m &= 0, \\ a_{12}l + a_{22}m &= 0 \end{aligned}$$

et *non singulière* dans le cas contraire.

L'équation (2) définit une droite relativement à une direction non singulière, qui est par définition le *diamètre conjugué* de $l : m$ non singulière.

Comme

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = (a_{11}l + a_{12}m)\, l + (a_{12}l + a_{22}m)\, m,$$

chaque direction singulière est direction asymptotique.

La réciproque n'est en général pas vraie. Si $\delta \neq 0$, les équations (3) n'admettent par exemple en l et m que la solution triviale $(l, m) = (0, 0)$ (car δ est le déterminant de ce système d'équations homogènes), si bien que *toutes les directions relatives à une courbe à centre sont non singulières* (y compris les deux directions asymptotiques quand elles existent). □

Si $\delta = 0$, les équations (3) possèdent une solution non triviale unique (à un facteur de proportionnalité près) $(l, m) \neq (0, 0)$, et $l : m = -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$. Ainsi, *les courbes sans centre ou à une infinité de centres admettent une direction singulière unique* $-a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$. □

Les formules (10) de la leçon 20 entraînent que cette direction est pour $\delta = 0$ une direction asymptotique (unique) de la courbe. Ainsi, *la direction asymptotique des courbes sans centre ou à une infinité de centres est la direction singulière.* □

S'agissant de la parabole, on établit par des calculs directs que c'est la direction de son axe. Dans le cas de deux droites parallèles, c'est la direction des droites.

* * *

Soit (2) le diamètre conjugué d'une direction $l : m$ non singulière. Il est clair que la relation entre (2) et $l : m$ est intrinsèque, i.e. avec $l : m$ définie par un autre couple de nombres l, m (mais qui lui est proportionnel) et l'équation (2) correspondante, on aboutit à la même droite (parce que la nouvelle équation (2) est proportionnelle à l'ancienne).

Quant à la relation entre la droite (2) et l'équation (1) de la courbe de degré 2, elle est autrement difficile à établir. On ignore pour le moment l'arbitraire laissé sur (1), si bien que le seul moyen de décider du caractère correct de la définition du diamètre (2) est de lui associer une image géométrique sensible sans recourir à l'équation (1).

Pour toute direction $l : m$ non singulière, le diamètre (2) a comme direction $-(a_{11}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m)$. Si la direction $l : m$ est asymptotique (on rappelle que cela est possible uniquement pour $\delta \neq 0$) et, partant,

$$(a_{11}l + a_{12}m)\, l + (a_{12}l + a_{22}m)\, m = 0,$$

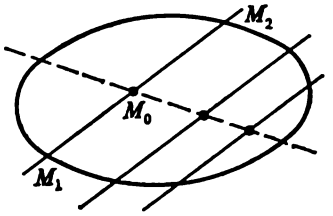
elle coïncide avec la direction de (2). Comme le coefficient de t de l'équation (7) de la leçon 20 est par définition nul pour tout point $M_0\,(x_0, y_0)$ du diamètre, le diamètre (2) est une asymptote à la direction $l : m$ (et il en est bien caractérisé) ou une droite de direction $l : m$ confondue avec (1) (la courbe (1) étant à centre, on verra plus loin que (2) en est bien caractérisé cette fois encore). Ainsi, le diamètre (2) est défini de façon correcte si $l : m$ est une direction asymptotique.

Soit $l : m$ une direction non asymptotique et soit une droite quelconque de direction $l : m$ (i.e. de vecteur directeur $\mathbf{a}\,(l, m)$). On suppose que la droite coupe la courbe (1) en deux points distincts M_1, M_2 et que le milieu $M_0\,(x_0, y_0)$ du segment $\overline{M_1M_2}$ définit avec le vecteur directeur $\mathbf{a}(l, m)$ la droite. Soient

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm \tag{4}$$

les équations paramétriques et t_1, t_2 les valeurs relatives à M_1 et M_2 du paramètre t. On a $\overrightarrow{M_0M_1} = t_1\mathbf{a}$, $\overrightarrow{M_0M_2} = t_2\mathbf{a}$. Or $\overrightarrow{M_0M_1} = -\overrightarrow{M_0M_2}$ par hypothèse, donc $t_1 + t_2 = 0$.

Selon les formules de Viète, la somme $t_1 + t_2 = 0$ est le quotient du coefficient de signe contraire de t (dans l'équation (7) de la leçon 20) par le coefficient de t^2, ce qui démontre la nullité dudit coefficient. Cela signifie que les coordonnées x_0, y_0 du milieu du segment intercepté par (1) sur chaque droite de direction $l : m$ vérifient l'équation du diamètre conjugué de la direction $l : m$, i.e. ce point appartient au diamètre (2).



Inversement, soit M_0 (x_0, y_0) un point quelconque du diamètre (2). On suppose que la droite (4) de direction $l : m$ coupe la courbe (1) en deux points M_1 et M_2. Les valeurs associées t_1, t_2 du paramètre t sont racines de l'équation (7) mentionnée. Le point M_0 (x_0, y_0) appartient au diamètre (2), si bien que le coefficient de t de (7) est nul. Aussi $t_1 + t_2 = 0$, donc M_0 partage le segment $\overline{M_1M_2}$ en son milieu.

Définition 2. Une direction $l : m$ s'appelle la *direction de corde* (relativement à la courbe (1)) s'il existe au moins deux droites de cette direction dont chacune coupe (1) en deux points distincts.

Toute direction de corde est direction non asymptotique.

Il ressort des résultats ci-dessus que le diamètre de (1) conjugué d'une direction de corde $l : m$ est bien défini comme étant une droite passant par les milieux des segments que la courbe (1) intercepte sur les droites de cette direction.

Ainsi, les diamètres conjugués des directions de corde sont définis de façon correcte.

S'agissant des diamètres conjugués des directions qui ne sont pas directions de corde, on doit se faire à l'idée que leur définition est peut-être incorrecte et l'avoir toujours présent à l'esprit.

On observe que toutes les directions (non asymptotiques) relatives aux courbes [1] à [8] sont directions de corde. La définition 2 est donc correcte dans ce cas. Un calcul trivial montre que s'il s'agit de deux droites confondues [9], chacune d'elles est le diamètre conjugué de toute direction non asymptotique, i.e. on a une fois de plus une définition correcte.

* * *

On récrit (2):

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\, l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\, m = 0,$$

d'où on a de suite (cf. équation (3) de la leçon 20) qu'elle est satisfaite par les coordonnées de tout centre de la courbe (1). Ainsi, *par chaque centre de la courbe* (1) *passent tous ses diamètres.* □

Il en découle en particulier que toute courbe ayant une infinité de centres en ligne droite admet un diamètre unique confondu avec

cette droite. Ce diamètre est conjugué de chaque direction non singulière (i.e. non asymptotique).

* * *

La direction

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m)$$

du diamètre (2) conjugué d'une direction $l : m$ vérifie la relation

$$(a_{11}l + a_{12}m)\, l' + (a_{12}l + a_{22}m)\, m' = 0,$$

i.e.

$$a_{11}ll' + a_{12}\,(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0, \tag{5}$$

ce qui légitime la

Définition 3. La direction $l' : m'$ est dite *conjuguée* d'une direction $l : m$ (par rapport à la courbe (1)) si l'on est dans la condition (5).

La condition reste entière si l'on échange l, m et l', m'. Par conséquent, *la relation de conjugaison est symétrique*, i.e. la direction $l : m$ est conjuguée de la direction $l' : m'$. On parle donc des *directions conjuguées* $l : m$ et $l' : m'$.

Si $l : m$ est non singulière, la direction conjuguée $l' : m'$ est celle du diamètre conjugué et elle se définit de façon unique. La direction conjuguée d'une direction $l : m$ singulière peut être quelconque.

On note de plus qu'une direction $l : m$ (singulière ou non) est direction asymptotique si et seulement si elle est *auto-conjuguée*.

Définition 4. Deux diamètres d'une courbe à centre (1) sont dits *conjugués* s'ils admettent des directions conjuguées, i.e. si chaque diamètre est conjugué de la direction de l'autre.

On n'introduit pas la notion de diamètres conjugués des courbes sans centre ou ayant une ligne des centres.

Pour qu'un diamètre soit auto-conjugué, il faut et il suffit qu'il soit une asymptote. Inversement, toute asymptote (d'une courbe à centre) est un diamètre auto-conjugué.

* * *

Voyons s'il est possible de simplifier l'équation de la courbe (1) par un choix raisonnable des coordonnées affines.

La condition (4) montre que *les directions* $1 : 0$ *et* $0 : 1$ *des axes de coordonnées sont conjuguées si et seulement si*

$$a_{12} = 0.$$

En effet, les directions $l : m = 1 : 0$ et $l' : m' = 0 : 1$ remplissent la condition (4) si et seulement si $a_{12} = 0$. □

Si l'on choisit des axes de coordonnées de directions conjuguées, on élimine dans (1) le terme en xy.

En transférant l'origine au centre, on en chasse les termes linéaires. On a la

Proposition 1. *Pour toute courbe du second degré ayant un centre unique, il existe un système de coordonnées affines x, y dans lequel l'équation de la courbe s'écrit*

$$\text{(I)} \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad \text{où} \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0.$$

Pour qu'un système de coordonnées affines présente cette propriété, il faut et il suffit que l'origine coïncide avec le centre de la courbe et que les axes de coordonnées soient les diamètres conjugués. □

On est dans la condition $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ parce que dans le cas contraire l'équation (I) ne décrirait pas une courbe à centre.

* * *

Malheureusement, nous avons commis, en démontrant la proposition 1, une grave erreur de raisonnement. Il est déjà apparu que les notions de centre et de directions conjuguées se rapportent en général à l'équation (1) fixe, donnée à l'avance, de la courbe du second degré. Si l'on veut être tout à fait rigoureux, on devrait donc dire « un centre relativement à l'équation (1) » et non « un centre » ; « des directions conjuguées par rapport à l'équation (1) » et non « des directions conjuguées » tout court, et ainsi de suite. A la lumière de ces considérations on revient à la proposition 1 dont la démonstration s'effectue cette fois par étapes, ce qui fait ressortir sa logique interne.

Etape première. On choisit une direction non asymptotique (relativement à (1)) quelconque et on l'accepte comme direction de l'axe des ordonnées du nouveau système de coordonnées.

Etape 2. On prend pour direction de l'axe des abscisses la direction conjuguée (par rapport à (1)).

Etape 3. Par hypothèse, la courbe concernée admet un centre unique (relativement à (1)) qu'on considère comme origine.

Etape 4. On fixe le système de coordonnées en choisissant de façon arbitraire les vecteurs directeurs des axes de coordonnées.

Etape 5. On désigne par x', y' les coordonnées dans le système ainsi obtenu et on écrit en ces coordonnées l'équation de la courbe considérée :

$$(6) \qquad a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Etape 6. Les axes de coordonnées étant conjugués et le centre étant en l'origine, on a

$$a'_{12} = 0, \quad a'_{13} = 0, \quad a'_{23} = 0.$$

Par conséquent, l'équation (6) est (aux accents près) de la forme (I).

L'erreur saute aux yeux : à la dernière étape, la propriété de conjugaison et le centre sont rapportés à l'équation (6) et non à (1)!

La démonstration reste valable à condition de montrer que le fait de passer à (6) n'altère pas le résultat. On le constate en effet si l'on déduit (6) de (1) en substituant aux coordonnées x, y leurs expressions

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned}$$

moyennant x', y'. Mais les calculs s'avèrent assez laborieux à moins de faire preuve d'un esprit d'invention. On les simplifie par passage aux notations matricielles (d'autres procédés sont possibles dont le symbolisme d'Einstein).

Le premier membre de la condition de conjugaison

$$a_{11}ll_1 + a_{12}(lm_1 + ml_1) + a_{22}mm_1 = 0$$

(par rapport à l'équation (1)) est une forme bilinéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Il s'écrit donc

$$(l_1, m_1)\, A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

De même, le premier membre de l'équation (1) s'exprime par la formule

$$(x, y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33}.$$

D'autre part, les formules (7) s'écrivent en notations matricielles

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

où

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage. La substitution mentionnée donne donc le polynôme

$$\left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}} A \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+ 2(a_{13}, a_{23}) \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right] + a_{33} =$$

$$= (x', y')\, C^{\top} AC \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x', y')\, C^{\top} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ (x_0, y_0)\, AC \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x_0, y_0)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23})\, C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} = (x', y')\, C^{\top} AC \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ 2\,[(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)\, A]\, C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ (x_0, y_0)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33}$$

(nous avons utilisé la propriété de symétrie de A ($A^{\top} = A$) et l'identité $(a, b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (c, d) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$). Ainsi, on a prouvé que si l'équation (6) résulte de la substitution de (7) dans (1), alors la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

s'exprime par

$$A' = C^{\top} AC,$$

et la ligne (a'_{13}, a'_{23}) et le terme constant a'_{33} par

$$(a'_{13}, a'_{23}) = [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)\, A]\, C,$$

$$a'_{33} = (x_0, y_0)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33}.$$

Avec a un vecteur quelconque et l, m et l', m' ses coordonnées dans l'ancien et le nouveau système de coordonnées respectivement, on a

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}.$$

Aussi on a pour a et a_1 arbitraires

$$(l_1, m_1)\, A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = (l'_1, m'_1)\, C^{\top} AC \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} = (l'_1, m'_1)\, A' \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix},$$

et les relations

$$(l_1, m_1)\, A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0 \text{ et } (l'_1, m'_1)\, A' \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

sont donc équivalentes.

Ainsi, les directions des droites de vecteurs directeurs **a** et $\mathbf{a}_1$ sont conjuguées en coordonnées x, y par rapport à l'équation (1) si et seulement si elles sont conjuguées en x', y' par rapport à (6), si bien qu'à l'étape 6 la conjugaison est comprise au sens voulu (l'équation (6) étant nécessairement obtenue de façon décrite).

On procède de même pour le centre. Les coordonnées x, y du centre (relativement à (1)) de la courbe sont définies à partir de

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

relations équivalentes à une seule relation matricielle

$$(x,\ y)\,A + (a_{13},\ a_{23}) = (0,\ 0). \tag{8}$$

Aussi les coordonnées x', y' du centre (relativement à (6)) de la même courbe vérifient l'égalité

$$(x',\ y')\,A' + (a'_{13},\ a'_{23}) = (0,\ 0). \tag{9}$$

En vertu des formules démontrées,

$$(x',\ y')\,A' + (a'_{13},\ a'_{23}) = \left[C^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right]\right]^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}AC +$$
$$+ [(a_{13},\ a_{23}) + (x_0,\ y_0)\,A]\,C = [(x,\ y) - (x_0,\ y_0)]\,(C^{-1})^{\mathrm{T}}\,C^{\mathrm{T}}AC +$$
$$+ [(a_{13},\ a_{23}) + (x_0,\ y_0)\,A]\,C = [(x,\ y)\,A + (a_{13},\ a_{23})]\,C.$$

La matrice C étant inversible, il y a donc équivalence de (8) et (9).

On a complètement motivé l'étape 6 de la démonstration de la proposition 1. □

* * *

Quand la courbe n'est pas une courbe à centre, on prend pour direction 0 : 1 de l'axe des ordonnées une direction non singulière (i.e. une direction non asymptotique) quelconque et pour axe des abscisses le diamètre conjugué de cette direction (en plus de la direction, on fixe donc la position de l'axe des abscisses). D'après la formule générale (2), le diamètre conjugué de la direction 0 : 1 est défini par l'équation

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

(les coefficients et les coordonnées sont certes leurs homologues dépourvus d'accents de l'équation (6) correspondante). L'hypothèse « le diamètre est l'axe des abscisses $y = 0$ » entraîne donc $a_{12} = 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{23} = 0$, d'où $a_{11} = 0$ (car $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$). Avec l'axe des abscisses et la direction de l'axe des ordonnées ainsi choisis, l'équation de la courbe s'écrit

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0, \quad \text{où} \quad a_{22} \neq 0. \tag{10}$$

Comme son déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{13}^2,$$

la courbe (10) est du type II (absence de centre) ou du type (III) (il y a une ligne des centres) selon que $a_{13} \neq 0$ ou $a_{13} = 0$.

Ainsi, on a pour $a_{13} = 0$ la

Proposition 2. *Pour toute courbe du second degré ayant une ligne des centres, il existe un système de coordonnées affines x, y tel que son équation soit de la forme*

$$\text{(III)} \qquad a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad \text{où} \quad a_{22} \neq 0.$$

Un système de coordonnées affines jouit de cette propriété si et seulement si l'axe des ordonnées a une direction non singulière et l'axe des abscisses est le diamètre conjugué de la direction de l'axe des ordonnées. □

Si $a_{13} \neq 0$, l'axe des abscisses coupe la courbe (10) au point d'abscisse $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$. On accepte ce point pour origine (ce qui fixe la position de l'axe des ordonnées) et on annule a_{33} de l'équation (10). Ainsi, on a la

Proposition 3. *Pour toute courbe du second degré n'ayant pas de centre, il existe un système de coordonnées affines x, y tel que son équation soit de la forme*

$$\text{(II)} \qquad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \quad \text{où} \quad a_{22} \neq 0, \quad a_{13} \neq 0.$$

Un système de coordonnées affines jouit de cette propriété si et seulement si l'axe des ordonnées a une direction non singulière, l'axe des abscisses est le diamètre conjugué de la direction de l'axe des ordonnées et l'origine appartient à la courbe. □

* * *

Il y a intérêt à réunir les trois propositions de cette leçon. On a le

Théorème 1. *Pour toute courbe du second degré du plan affine, il existe un système de coordonnées affines x, y tel que son équation soit de l'un des types suivants :*

$$\text{(I)} \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad \text{où} \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0;$$

$$\text{(II)} \qquad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \quad \text{où} \quad a_{22} \neq 0, \quad a_{13} \neq 0;$$

$$\text{(III)} \qquad a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad \text{où} \quad a_{22} \neq 0,$$

toute courbe étant définie dans deux systèmes de coordonnées par une équation de même type. □

La dernière affirmation résulte de l'interprétation géométrique des équations (courbes à centre, courbes sans centre, courbes ayant une ligne des centres).

Il y a lieu de souligner que le théorème 1 est vrai dans le plan affine sur K quelconque.

LEÇON 22

Courbes du second degré dans le plan affine complexe.— Courbes du second degré dans le plan affine réel-complexe.— Unicité de l'équation d'une courbe du second degré.— Courbes du second degré dans le plan euclidien.— Circonférences.

Selon que tel ou tel coefficient est nul ou non, les équations du théorème 1 de la leçon précédente donnent, après division par un coefficient $\neq 0$, pour les courbes du second degré:

(I_1) $Ax^2 + By^2 = 1,$

(I_0) $Ax^2 + By^2 = 0,$

(II) $y^2 = 2Ax,$

(III_1) $y^2 + A = 0,$

(III_0) $y^2 = 0,$

avec $A \neq 0$, $B \neq 0$.

On simplifie ces équations si les propriétés arithmétiques du corps de base $\mathbb{K}$ le permettent. Si tout élément de $\mathbb{K}$ possède par exemple une racine carrée (c'est le cas en particulier du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes), on introduit dans (I_1) et (I_0) les nouvelles coordonnées x', y' définies par

$$x' = \sqrt{A}\,x, \quad y' = \sqrt{B}\,y,$$

et dans (II) et (III_1) x', y' définies par

$$x' = x, \qquad y' = \frac{y}{\sqrt{A}}.$$

Cela donne le

Théorème 1 (réduction à la forme canonique dans le cas $\mathbb{C}$). *Pour toute courbe du second degré dans le plan affine complexe, il existe un système de coordonnées affines x, y tel que l'équation de la courbe soit dans ce système l'une des cinq équations suivantes:*

[1] $x^2 + y^2 = 1,$

[2] $x^2 + y^2 = 0,$

[3] $y^2 = 2x,$

[4] $y^2 + 1 = 0,$

[5] $y^2 = 0,$

toute courbe étant définie dans deux systèmes de coordonnées par une même équation.

La dernière affirmation tient à ce que la courbe [2] est un couple de droites sécantes, la courbe [4] deux droites parallèles, la courbe [5] deux droites confondues, la courbe [3] n'a pas de centre (de symétrie) et la courbe [1] est une courbe à centre (de symétrie) et ne contient aucune droite (si l'on a identiquement en t

$$(x_0 + tl)^2 + (y_0 + tm)^2 = 1$$

alors

$$l^2 + m^2 = 0, \quad x_0 l + y_0 m = 0, \quad x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

ce qui n'est possible que lorsque $(l, m) = (0, 0)$). □

Conséquence (théorème de classification des courbes du second degré dans le cas $\mathbb{C}$). *Toute courbe du second degré du plan affine complexe est, ou bien*

a) *une courbe à centre* [1] *ne contenant aucune droite, ou bien*

b) *une courbe dépourvue de centre* [3], *ou bien*

c) *deux droites (sécantes* [2], *parallèles distinctes* [4], *confondues* [5]). □

A la courbe a) on donne indifféremment le nom d'ellipse ou d'hyperbole. C'est l'*ovale* de certains auteurs.

La courbe b) peut être appelée *parabole.*

* * *

Dans le cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, on introduit pour (I_1), (I_0) (afin que les coefficients restent réels) les nouvelles coordonnées

$$x' = \sqrt{|A|}\, x, \quad y' = \sqrt{|A|}\, y,$$

et pour (II), (III_1)

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{|A|}}$$

Les équations pouvant être multipliées par -1, on en déduit le

Théorème 2 (réduction à la forme canonique dans le cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$). *Pour toute courbe réelle du second degré du plan affine réel-complexe, il existe un système réel de coordonnées affines tel que la courbe soit définie dans ce système par l'une des neuf équations affines canoniques suivantes:*

[1] $x^2 + y^2 - 1 = 0,$

[2] $x^2 + y^2 + 1 = 0,$

[3] $x^2 + y^2 = 0,$

[4] $x^2 - y^2 - 1 = 0.$

[5] $x^2 - y^2 = 0,$

[6] $y^2 - 2x = 0$,

[7] $y^2 - 1 = 0$,

[8] $y^2 + 1 = 0$,

[9] $y^2 = 0$,

toute courbe étant définie dans deux systèmes distincts par une même équation.

La dernière affirmation découle de la propriété de chaque courbe [1] à [9] d'être caractérisée géométriquement :

[1] Courbe à centre qui découpe dans le plan réel une ellipse.
[2] Courbe à centre disjointe du plan réel.
[3] Deux droites sécantes complexes conjuguées.
[4] Courbe à centre qui découpe dans le plan réel une hyperbole.
[5] Deux droites sécantes réelles.
[6] Courbe sans centre (qui décrit dans le plan réel une parabole).
[7] Deux droites parallèles distinctes réelles.
[8] Deux droites parallèles distinctes complexes conjuguées.
[9] Deux droites confondues (qui sont automatiquement réelles). □

Les coordonnées affines qui repèrent une courbe donnée du second degré de la forme spécifiée dans le théorème 2, sont dites *canoniques* (pour la courbe concernée).

Il est déjà apparu que la courbe [1] est une ellipse réelle, la courbe [2] une ellipse imaginaire et que les courbes [4] et [6] sont une hyperbole et une parabole respectivement (l'épithète « réelle » est sous-entendue).

Conséquence (théorème de classification des courbes du second degré dans le cas ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)). *Dans le plan affine réel-complexe, toute courbe réelle du second degré est l'une des courbes suivantes :*

a) *une ellipse (réelle* [1] *ou imaginaire* [2]),
b) *une hyperbole* [4],
c) *une parabole* [6],
d) *deux droites (sécantes complexes conjuguées* [3], *sécantes réelles* [5], *parallèles distinctes réelles* [7], *parallèles distinctes complexes conjuguées* [8], *confondues* [9]). □

* * *

On achève la construction de la théorie des courbes du second degré (dans les cas $\mathbb{C}$ et ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)) en résolvant le problème relatif à l'unicité de leurs équations.

Etant donnée une courbe du second degré définie par l'équation

$$F(x, y) = 0,$$

avec $F(x, y)$ un polynôme de degré 2, l'équation proportionnelle

$$kF(x, y) = 0,$$

où k est un nombre quelconque non nul, définit la même courbe. On identifie naturellement de telles équations.

Il se trouve que (dans les cas $\mathbb{C}$ et $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$), c'est le seul arbitraire laissé sur les équations.

Théorème 3 (unicité de l'équation d'une courbe du second degré). *Si, dans le plan affine complexe ou* $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, *deux équations du second degré*

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0$$

définissent (dans un même système de coordonnées affines x, y) *une même courbe, ces équations sont proportionnelles:*

$$G(x, y) = kF(x, y), \quad k \neq 0.$$

Le théorème montre que nous avons eu tort de démontrer scrupuleusement le théorème 1 de la leçon précédente. Il est vrai qu'utiliser à l'époque le résultat ci-dessus équivaudrait à tomber dans un cercle vicieux. Ce résultat ne s'appuie-t-il pas sur le théorème de classification, donc sur la leçon 21 ?

Avant d'aborder la démonstration même, on fait plusieurs remarques d'ordre général qui ont leur intérêt propre. Le corps $\mathbb{K}$ est supposé quelconque pour l'instant.

Le fait que la courbe du second degré

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

passe par le point $M_0(x_0, y_0)$ signifie la validité de la relation

$$(1) \qquad a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

qui est une condition linéaire homogène à imposer aux coefficients

$$(2) \qquad a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{22}, \quad a_{13}, \quad a_{23}, \quad a_{33}$$

de l'équation de la courbe. On démontre en algèbre (il s'agit d'un cas particulier du théorème général portant sur le nombre de solutions élémentaires d'un système d'équations homogènes, théorème dont nous donnerons au prochain semestre une interprétation géométrique et une démonstration appropriée) qu'un système de n équations linéaires homogènes à $n + 1$ inconnues admet une solution non triviale unique à un facteur de proportionnalité près s'il y a indépendance linéaire des équations du système. Si cinq points distincts

$$(3) \qquad M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad M_4, \quad M_5$$

présentent la propriété que 5 conditions (1) imposées aux coefficients (2) sont linéairement indépendantes (au cours de la démonstration du théorème 3 nous dirons de ces points qu'ils sont *indépendants*) et s'il existe une courbe du second degré passant par ces points (l'existence ne découle pas du théorème des équations parce

que la solution peut avoir les trois composantes a_{11}, a_{12}, a_{22} nulles), alors deux équations quelconques de la courbe sont proportionnelles. Ainsi, on a la

Proposition 1. *Si une courbe du second degré passe par cinq points indépendants, alors ses deux équations quelconques (de la forme $F(x, y) = 0$, avec $F(x, y)$ un polynôme de degré 2) sont proportionnelles.* □

On complète cette proposition par le lemme important ci-dessous.

Lemme. *Les points* (3) *sont indépendants s'ils ne sont pas alignés quatre à quatre.*

Démonstration. Supposons que les points (3) sont dépendants, i.e. la relation (1) associée à l'un d'eux (disons, à M_5) est combinaison linéaire des relations correspondant aux quatre points restants. Cela signifie que dès qu'une courbe du second degré passe par M_1, M_2, M_3, M_4, elle passe également par M_5. Or, l'une de ces courbes est formée de deux droites M_1M_2 et M_3M_4, si bien que M_5 appartient à l'une de ces droites. On établit de même que M_5 est sur M_1M_3 ou M_2M_4, ce qui n'est évidemment possible que si au moins deux des quatre droites se confondent, i.e. si au moins trois des points M_1, M_2, M_3, M_4 sont en ligne droite.

Soient M_1, M_2, M_3 ces points. La courbe du second degré formée de la droite M_1M_2 et d'une droite quelconque passant par M_4 contient M_1, M_2, M_3, M_4 à la fois, si bien que M_5 lui appartient. Il est clair que cela n'a lieu que si M_5 est sur M_1M_2, auquel cas M_1, M_2, M_3 et M_5 sont alignés: contradiction avec l'hypothèse, qui démontre le lemme. □

Fort de ces résultats, on passe à la

Démonstration du théorème 3. D'après la proposition 1, il suffit de trouver cinq points indépendants de chaque courbe du second degré. Ceci étant, ils ne sont pas nécessairement réels dans le cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ (en effet, on n'établit pas l'équation de la courbe connaissant ces points, on en démontre seulement l'unicité). Aussi on se borne, sans restreindre la généralité, au cas complexe.

Si la courbe ne contient aucune droite (i.e. si c'est un ovale ou une parabole), ses trois (à fortiori quatre) points quelconques ne sont pas alignés. Ses cinq points quelconques sont donc indépendants aux termes du lemme. Le théorème se trouve démontré pour cette courbe.

Il est clair que toute courbe couple de deux droites distinctes contient cinq points vérifiant la condition du lemme, donc indépendants, d'où la validité du théorème pour les couples de droites distinctes.

Le cas de deux droites confondues ne se traite pas si facilement.

Soit $F(x, y) = 0$, avec $F(x, y)$ un polynôme de degré 2, une équation quelconque de deux droites confondues. Comme le veut le théorème de réduction (énoncé exactement), on passe des coordon-

nées x, y à

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + x'_0,$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + y'_0$$

telles qu'en substituant dans $F(x, y)$ les expressions de x, y en fonction de x', y', on obtienne un polynôme proportionnel à y'^2. On conçoit que $F(x, y)$ est alors proportionnel à $(c_{21}x + c_{22}y + y'_0)^2$, ce qui démontre que toute équation de deux droites confondues s'écrit $(Ax + By + C)^2 = 0$, où $Ax + By + C = 0$ définit une droite du couple.

La proportionnalité de deux équations quelconques d'un couple de droites confondues découle maintenant de la même propriété de deux équations quelconques de la droite.

Le théorème 3 se trouve complètement démontré. □

Remarque. S'agissant de $\mathbb{K}$ quelconque (de caractéristique $\neq 2$), on montre sans peine que les courbes (I_1) et (II) (voir début de la leçon) ne contiennent pas de droite, que la courbe (I_0) est, ou bien un point, ou bien deux droites sécantes, et que la courbe (III_1) est soit un ensemble vide, soit deux droites parallèles. En outre, l'ensemble des points de chaque courbe (II) est équipotent à l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$, et l'ensemble des points de chaque courbe (I_1) non vide l'est à l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ plus un élément (démontrer !). Ainsi, le cas de $\mathbb{K}$ quelconque coïncide formellement avec le cas du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Si $\mathbb{K}$ contient plus de trois éléments, le théorème 3 est donc vrai pour toute courbe du second degré du plan affine sur $\mathbb{K}$ qui n'est pas réduite à un point. Il n'est pas en principe vrai pour les courbes vides ou les courbes points.

* * *

Plaçons-nous maintenant dans le plan euclidien (réel ou réel-complexe) et dans un système de coordonnées rectangulaires.

Définition 1. On dit d'une direction $l : m$ qu'elle est *principale* relativement à la courbe du second degré

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

si la direction perpendiculaire $-m : l$ lui est conjuguée (et n'est pas en particulier une direction singulière).

Cette condition est évidemment satisfaite par la direction singulière $-a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$. Ainsi, la direction singulière (i.e. la direction de l'axe pour la parabole et la direction des droites parallèles dans le cas du couple de droites parallèles) est principale pour toute courbe qui n'est pas à centre.

La direction perpendiculaire à la direction singulière est également principale. Ce sont les seules directions principales des courbes

du second degré qui ne sont pas à centre. Ainsi, *pour toute courbe qui n'est pas une courbe à centre, il existe deux directions principales perpendiculaires et deux seulement.* □

Si l'on se rappelle le procédé décrit dans la leçon 21 pour réduire l'équation d'une courbe du second degré à la forme simple (II) ou (III), on voit de suite que dans le plan euclidien cette réduction s'effectue dans la classe de coordonnées rectangulaires: il suffit de prendre dès les premiers pas la direction de l'axe des ordonnées pour direction principale et non singulière. Ainsi, *pour toute courbe du second degré du plan euclidien réel ou réel-complexe qui n'est pas une courbe à centre, il existe des coordonnées rectangulaires x, y par rapport auxquelles son équation s'écrit sous forme* (II) *ou* (III). □

On établit le résultat analogue pour les courbes à centre si l'on prouve l'existence d'au moins un couple de directions perpendiculaires (donc principales) conjuguées, ce qui ne présente pas de difficulté. En effet, la propriété « la direction non singulière $l : m$ est conjuguée de la direction perpendiculaire $-m : l$ » signifie la validité de l'égalité

$$l\,(a_{21}l + a_{22}m) - m\,(a_{11}l + a_{12}m) = 0,$$

i.e. de

$$a_{21}l^2 + (a_{22} - a_{11})\,lm - a_{12}m^2 = 0. \tag{4}$$

Ainsi, *la direction $l : m$ est principale si et seulement si l'on a la relation* (4). □

(A propos, il est immédiat de vérifier que le résultat persiste pour $l : m$ singulière.)

La relation (4) est vérifiée identiquement pour $a_{12} = 0$ et $a_{11} = a_{22}$, i.e. dans ce cas toute direction est principale. Lorsque $a_{12} \neq 0$, la relation (4) est une équation du deuxième degré en $l : m$ dont les solutions se mettent sous deux formes équivalentes

$$l : m = \left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right) : 2a_{12},$$

$$l : m = -2a_{12} : \left(a_{11} - a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right).$$

Les mêmes formules ont lieu pour $a_{12} = 0$, $a_{11} \neq a_{22}$ à condition d'utiliser celle qui a un sens: c'est la première formule pour la racine précédée de signe plus et la seconde dans le cas contraire.

Ainsi, ces formules donnent deux valeurs réelles de $l : m$ pour $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$, i.e. *étant donnée une conique à centre, ou bien il existe deux directions principales et deux seulement* (qui sont automatiquement perpendiculaires et conjuguées), *ou bien toute direction est principale.* □

On a démontré en particulier qu'il existe pour toute conique à centre des coordonnées rectangulaires telles que son équation soit (I), i.e. ou bien (I_1), ou bien (I_0).

On multiplie, si besoin est, par -1 et on estime que dans cette équation $A > 0$. On pose

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{|B|}}.$$

En outre, on admet que $a \geqslant b$ pour (I_1) (si $B > 0$) et pour (I_0) (sinon on doit effectuer un changement de coordonnées). S'agissant de (I_0), on obtient de plus

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

Soit le cas (II). On change, si besoin est, l'orientation de l'axe des abscisses et on admet $A > 0$. On pose $p = A$.

Si l'on se place dans (III_1), on pose

$$b = \sqrt{|A|}.$$

Ainsi, on a le

Théorème 4 (réduction à la forme canonique dans le plan euclidien). *Pour toute courbe (réelle) du second degré du plan euclidien réel ou réel-complexe, il existe un système (réel) de coordonnées rectangulaires tel que l'équation de la courbe soit de l'une des neuf catégories:*

[1] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0;$

[2] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geqslant b > 0;$

[3] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geqslant b > 0$ *et* $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1;$

[4] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0;$

[5] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a > 0, \quad b > 0$ *et* $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1;$

[6] $y^2 = 2px, \quad p > 0;$

[7] $y^2 - b^2 = 0, \quad b > 0;$

[8] $y^2 + b^2 = 0, \quad b > 0;$

[9] $y^2 = 0.$

Dans le plan réel, ce sont respectivement
[1] *une ellipse,*
[2] *un ensemble vide,*
[3] *un point,*
[4] *une hyperbole,*
[5] *deux droites sécantes,*
[6] *une parabole,*
[7] *deux droites parallèles distinctes,*

[8] *un ensemble vide*,
[9] *deux droites confondues*,
et, dans le plan réel-complexe,
[1] *une ellipse réelle*,
[2] *une ellipse imaginaire*,
[3] *deux droites sécantes complexes conjuguées*,
[4] *une hyperbole*,
[5] *deux droites sécantes réelles*,
[6] *une parabole*,
[7] *deux droites parallèles distinctes réelles*,
[8] *deux droites parallèles distinctes complexes conjuguées*,
[9] *deux droites confondues*,
toute courbe non réduite à un point dans le cas réel étant définie dans deux systèmes de coordonnées par une même équation.

S'agissant d'équations de catégories différentes, la dernière affirmation découle de son homologue affine, et s'agissant d'équations de même catégorie, elle tient à ce que (dans les cas [1] à [8]) les coefficients sont caractérisés géométriquement comme suit:

[1] Les nombres a et b sont égaux aux longueurs des segments interceptés par la courbe sur les axes de symétrie.

[2] Les nombres ia et ib sont égaux aux longueurs des segments interceptés par la courbe sur les axes de symétrie (cela est vrai seulement du cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$).

[3] (Même remarque.) Lorsque $a = b$, la longueur de tout segment de chaque droite est nulle (ce sont les droites *isotropes*), et dans le cas contraire, le cosinus de l'angle de ces droites est $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. Cette condition jointe à la condition de normalisation $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ définit univoquement les nombres a et b tels que $a \geqslant b > 0$.

[4] Le nombre $2a$ est la longueur du segment défini par la courbe sur l'axe de symétrie, et $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ est le cosinus de l'angle formé par ses asymptotes.

[5] Le nombre $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ est égal au cosinus de l'angle de deux droites formant la courbe.

[6] Le nombre $\frac{p}{2}$ est la distance du foyer au sommet.

[7] Le nombre $2b$ est la distance de deux droites formant la courbe.

[8] Le nombre $2ib$ est la distance de deux droites formant la courbe (cela est vrai du cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ seul). □

Conséquence (théorème de classification des courbes du second degré du plan euclidien). *Toute courbe réelle du second degré du plan euclidien réel-complexe (toute courbe du second degré du plan euclidien réel qui n'est pas réduite à un point) est, ou bien*

a) *une ellipse (réelle* [1] *ou imaginaire* [2]), *ou bien*

b) *une hyperbole* [4], *ou bien*

c) *une parabole* [6], *ou bien*

d) *deux droites* (*sécantes complexes conjuguées* [3], *sécantes réelles* [5], *parallèles distinctes réelles* [7], *parallèles distinctes complexes conjuguées* [8], *confondues* [9]). □

* * *

On examine, pour terminer, le problème de description géométrique des courbes à centre telles que toute direction soit principale.

L'exemple de cette courbe dans le plan euclidien réel est la *circonférence*, i.e. le lieu des points dont la distance à un point donné (le centre) est R. En effet, la circonférence est évidemment décrite (en coordonnées rectangulaires x, y) par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \tag{5}$$

avec a, b les coordonnées du centre, i.e. par

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \tag{6}$$

où $c = a^2 + b^2 - R^2$. Ainsi, on a effectivement $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$. □

Si l'on se place dans le plan réel-complexe, on prend cette propriété pour définition.

Définition 2. Une courbe réelle du second degré du plan euclidien réel-complexe s'appelle *circonférence* si $a_{12} = 0$ et $a_{11} = a_{22}$, i.e. si son équation se met sous forme (6). Le point (réel) de coordonnées a, b est par définition le *centre* de la circonférence et le nombre $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ son *rayon*.

On vérifie de suite le caractère intrinsèque de ces définitions, i.e. le fait qu'elles ne dépendent pas des coordonnées rectangulaires x, y.

Trois cas peuvent se présenter.

Cas $a^2 + b^2 - c > 0$. Le rayon R est un nombre réel positif. L'intersection de la circonférence avec le plan réel est une circonférence usuelle de rayon R et de centre (a, b). Cette circonférence étant une courbe du second degré est du type [1], i.e. c'est une ellipse réelle. On dit d'ordinaire que c'est une *circonférence réelle*.

Cas $a^2 + b^2 - c = 0$. Le rayon R est 0. La circonférence touche le plan réel en un seul point (0, 0) qui est son centre. En tant qu'une courbe du second degré, elle est du type [3], i.e. ce sont deux droites isotropes sécantes (en (0, 0)) complexes conjuguées.

Cas $a^2 + b^2 - c < 0$. Alors on pose d'ordinaire $R = \sqrt{|a^2 + b^2 - c|}$, i.e. on emploie la notation $R = iR$. La circonférence est dépourvue de points réels et est du type [2]. On lui donne d'habitude le nom de *circonférence imaginaire*.

Les trois circonférences sont le lieu des points du plan euclidien $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ dont la distance au centre est égale à un nombre donné réel ou imaginaire pur. Cette propriété peut jouer le rôle de définition.

LEÇON 23

Ellipsoïdes.— Ellipsoïdes imaginaires.— Cônes imaginaires du second degré.— Hyperboloïdes à deux nappes.— Hyperboloïdes à une nappe.— Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.— Cônes du second degré.— Paraboloïdes elliptiques.— Paraboloïdes hyperboliques.— Cylindres elliptiques.— Autres quadriques.— Théorème de classification.

Dans l'espace, l'analogue d'une courbe de degré 2 est une *surface du second degré* (une *quadrique*) dont l'équation s'écrit

$$F(x, y, z) = 0,$$

avec $F(x, y, z)$ un polynôme de degré 2 en x, y, z. On établit pour les quadriques les mêmes résultats que pour les courbes du second degré au prix de certaines modifications et des complications adéquates. Nous en laissons le soin au lecteur tout en nous bornant à une description sommaire des quadriques. Nous nous placerons dans l'espace euclidien rapporté aux coordonnées rectangulaires.

* * *

[1] Ce sont les surfaces définies dans un système de coordonnées rectangulaires x, y, z par une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

où $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Elles portent le nom d'*ellipsoïdes*.

Lorsque $a = b = c$, l'ellipsoïde devient une *sphère* de rayon a.

On se représente au mieux l'ellipsoïde si l'on étudie ses sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Soit par exemple le plan $z = h$ parallèle au plan Oxy. Dans ce plan, les nombres x, y sont les coordonnées (dans le repère Hij, avec i, j les vecteurs unitaires portés par les axes Ox, Oy et H un point de coordonnées $(0, 0, h)$), et la courbe découpée dans le plan par l'ellipsoïde (1) est représentée en ces coordonnées par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

i.e.

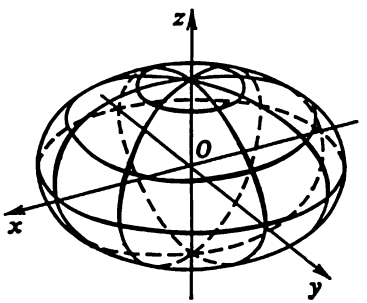
$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

Si $|h| > c$, le plan $z = h$ ne coupe donc pas l'ellipsoïde (1). Si $|h| = c$, ils ont un point commun unique (qui est $(0, 0, c)$ pour $h = c$ et $(0, 0, -c)$ pour $h = -c$), et si $|h| < c$, la section de l'ellipsoïde par le plan est une ellipse de demi-axes

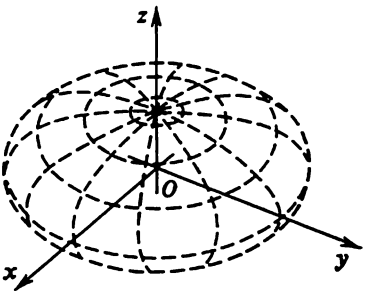
$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

dont les valeurs atteignent leur maximum ($= a$, $= b$) avec $h = 0$ et tendent d'une façon monotone vers 0 avec $|h|$ allant en croissant de 0 à c.

On montre de même que le plan $y = h$ ne coupe pas l'ellipsoïde (1) pour $|y| > b$, qu'ils se rencontrent pour $|y| = b$ en un seul



Ellipsoïde



Ellipsoïde imaginaire

point (qui est $(0, b, 0)$ pour $y = b$ et $(0, -b, 0)$ pour $y = -b$) et que la section de (1) par le plan est une ellipse de demi-axes

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},$$

dont les valeurs les plus grandes a et c sont atteintes pour $h = 0$ et qui tendent vers 0 avec $|h|$ allant en croissant de 0 à b.

De même, le plan $x = h$ et l'ellipsoïde (1) n'ont pas de point commun pour $|h| > a$, ils se coupent pour $|h| = a$ en un seul point $(a, 0, 0)$ ou $(-a, 0, 0)$ selon que $h = a$ ou $h = -a$, et le plan coupe pour $|h| < a$ l'ellipsoïde suivant une ellipse de demi-axes

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},$$

dont les valeurs maximales b et c sont réalisées pour $h = 0$ et qui décroissent jusqu'à 0 avec $|h|$ allant en croissant de 0 à a.

Cela donne une idée nette de la forme de l'ellipsoïde (1). En particulier, il est entièrement contenu dans un parallélépipède rectangle

(il est inscrit dans ce parallélépipède) de centre O (0, 0, 0), de faces parallèles aux plans de coordonnées et d'arêtes de longueur $2a$, $2b$ et $2c$ respectivement.

Il y a lieu d'ajouter que l'équation (1) est invariante dans le changement de signe des coordonnées x, y, z, si bien que les plans de coordonnées sont des plans de symétrie de l'ellipsoïde (1) et l'origine en est le centre de symétrie.

Lorsque $a > b > c$, l'ellipsoïde ne possède pas d'autres plans de symétrie.

* * *

[2] Ce sont les surfaces définies dans un système de coordonnées rectangulaires x, y, z par une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{2}$$

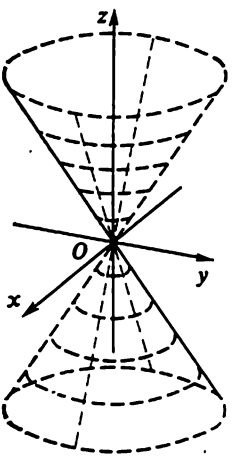
avec $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Ces surfaces dépourvues de points réels s'appellent *ellipsoïdes imaginaires.*

* * *

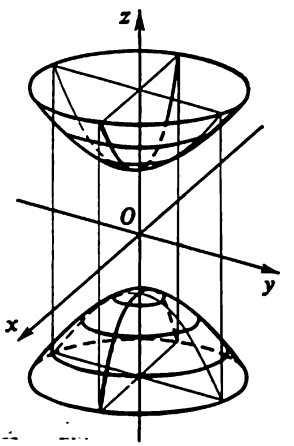
[3] Les surfaces de ce type sont décrites en des coordonnées rectangulaires x, y, z par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{3}$$

où $a \geqslant b \geqslant c > 0$ et $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Elles possèdent un point réel unique O (0, 0, 0) et sont connues sous le nom de *cônes imaginaires du second degré.*



Cône imaginaire du second degré



Hyperboloïde à deux nappes

* * *

[4] Ces surfaces sont définies en des coordonnées rectangulaires x, y, z par une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{4}$$

où $a \geqslant b > 0$, $c > 0$. Ce sont les *hyperboloïdes à deux nappes.*

Le plan $z = h$ ne coupe pas pour $|h| < c$ l'hyperboloïde (4), ils ont pour $|h| = c$ un point commun unique $(0, 0, c)$ ou $(0, 0\ -c)$ (selon que $h = c$ ou $h = -c$), et le plan coupe l'hyperboloïde pour $|h| > c$ suivant une ellipse de demi-axes

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

qui sont croissants (de 0 à $+\infty$) avec $|h|$ augmentant de c à $+\infty$.

Tout plan $y = h$ coupe l'hyperboloïde (4) suivant une hyperbole de demi-axes

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}, \quad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}},$$

qui augmentent de façon monotone (de c et a à $+\infty$) pour $|h|$ croissant de 0 à $+\infty$.

Tout plan $x = h$ coupe l'hyperboloïde (4) suivant une hyperbole dont les demi-axes

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}},$$

sont croissants (de c et b à $+\infty$) lorsque $|h|$ passe en croissant de 0 à $+\infty$.

Désormais on connaît bien la forme de l'hyperboloïde à deux nappes. En particulier, il comprend deux parties symétriques (deux nappes) situées dans les demi-espaces $z \geqslant c$ et $z \leqslant -c$ respectivement.

Comme dans le cas de l'ellipsoïde, les plans de coordonnées sont des plans de symétrie de l'hyperboloïde à deux nappes et l'origine en est le centre de symétrie.

* * *

[5] Ces surfaces sont décrites dans un système de coordonnées rectangulaires x, y, z par une équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{5}$$

avec $a \geqslant b > 0$, $c > 0$, et sont par définition les *hyperboloïdes à une nappe.*

Tout plan $z = h$ coupe l'hyperboloïde (5) suivant une ellipse de demi-axes

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

qui augmentent de a et b à $+\infty$ lorsque $|h|$ passe par valeurs croissantes de 0 à $+\infty$.

L'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

obtenue pour $h = 0$ est l'*ellipse de gorge* de l'hyperboloïde (5).

Quant au plan $y = h$, il coupe l'hyperboloïde (5) pour $|h| < b$ suivant une hyperbole de demi-axes

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$$

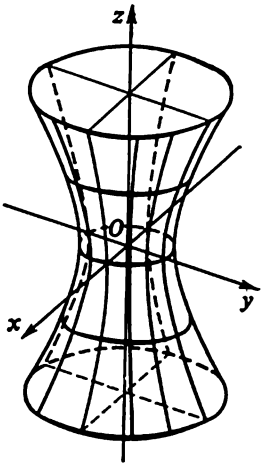
décroissant de a et c à 0 quand $|h|$ augmente de 0 à b; pour $|h| = b$, il coupe l'hyperboloïde suivant deux droites définies en x, z (qui sont évidemment les coordonnées rectangulaires du plan) par

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

et pour $|h| > b$ suivant une hyperbole de demi-axes

$$c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}, \quad a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$$

qui augmentent de façon monotone de 0 à $+\infty$ avec la croissance de $|h|$ de b à $+\infty$. Les axes imaginaires (resp. réels) des hyperboles obtenues pour $|h| > b$ sont parallèles aux axes réels (resp. imaginaires) des hyperboles correspondant à $|h| < b$.



Hyperboloïde à une nappe

De même, le plan $x = h$ coupe pour $|h| < a$ l'hyperboloïde (5) suivant une hyperbole de demi-axes

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$$

qui sont décroissants (de b et c à 0) lorsque $|h|$ augmente de 0 à $+\infty$; pour $|h| = a$, il coupe l'hyperboloïde suivant deux droites définies en coordonnées y, z (ce sont évidemment les coordonnées

rectangulaires dans ce plan) par l'équation

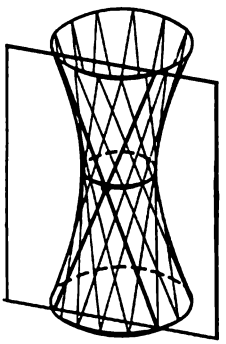
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

et pour $|h|>a$ suivant une hyperbole de demi-axes

$$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1},\quad b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$$

croissant de 0 à $+\infty$ avec $|h|$ augmentant de a à $+\infty$. Les axes imaginaires (resp. réels) des hyperboles associées au cas $|h|>a$ sont parallèles aux axes réels (resp. imaginaires) des hyperboles obtenues pour $|h|<a$.

Comme dans les cas précédents, l'hyperboloïde a pour plans de symétries les plans de coordonnées et pour centre de symétrie l'origine des coordonnées.



Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe

* * *

La propriété la plus intéressante de l'hyperboloïde (5) est de contenir en entier certaines droites.

Définition 1. Dans l'espace, on appelle *surface l fois réglée* une surface telle que par son point quelconque passent l (et seulement l) droites distinctes entièrement situées sur cette surface. Ces droites sont par définition les *génératrices rectilignes* de la surface réglée.

Proposition 1. *L'hyperboloïde à une nappe* (5) *est une surface doublement réglée.*

Démonstration. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de l'hyperboloïde (5). Pour que l'hyperboloïde contienne une droite de vecteur directeur $\mathbf{a}(l, m, n)$ passant par M_0, il faut et il suffit qu'on ait identiquement en t

$$\frac{(x_0+tl)^2}{a^2}+\frac{(y_0+tm)^2}{b^2}-\frac{(z_0+tn)^2}{c^2}=1.$$

On ouvre les parenthèses et on tient compte de l'égalité

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

vraie par hypothèse, il vient

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$$

et

$$\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}=0.$$

La première relation entraîne $n \neq 0$ (sinon on aurait $(l, m, n) = (0, 0, 0)$). On estime donc sans restreindre la généralité que $n = c$.

Alors, l et m vérifient les équations

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=1, \quad \frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}=\frac{z_0}{c}.$$

On pose dans la seconde

$$x_0=x_1+l\frac{z_0}{c} \quad \text{et} \quad y_0=y_1+m\frac{z_0}{c};$$

on a de suite (compte tenu de la première équation) que

$$\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}=0.$$

Comme

$$\frac{\left(x_1+l\frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_1+m\frac{z_0}{c}\right)^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=$$

$$=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+2\left(\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c}+$$

$$+\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-1\right)\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2},$$

on a de plus

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

i.e. le point (x_1, y_1) appartient à l'ellipse de gorge de l'hyperboloïde (5).

Aussi les nombres x_1, y_1 ne sont pas simultanément nuls, si bien que l'égalité

$$\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}=0$$

définit de façon unique le rapport $l : m = -a^2y_1 : b^2x_1$. On pose

$$l=-\frac{a}{b}y_1u, \quad m=\frac{b}{a}x_1u,$$

u étant un facteur de proportionnalité. Puisque

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}\right)u^2,$$

$u^2 = 1$, i.e. $u = \pm 1$. De plus

$$x_0=x_1+l\frac{z_0}{c}=x_1-u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c}y_1,$$

$$y_0=y_1+m\frac{z_0}{c}=y_1+u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c}x_1,$$

d'où les valeurs suivantes de x_1 et y_1 :

$$(*) \qquad x_1 = \frac{x_0 + u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c}y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}, \quad y_1 = \frac{y_0 - u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c}x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}.$$

Inversement, on vérifie immédiatement que le point de coordonnées

$$x = x_0 - u\frac{a}{b}y_1 t, \quad y = y_0 + u\frac{b}{a}x_1 t, \quad z = z_0 + ct,$$

où $u = \pm 1$ et x_1, y_1 sont donnés par les formules (*), appartient pour tout t à l'hyperboloïde (5) (et le point (x_1, y_1) à son ellipse de gorge). □

Il y a intérêt à récrire les équations paramétriques obtenues

$$x = x_0 - u\frac{a}{b}y_1 t,$$
$$y = y_0 + u\frac{b}{a}x_1 t,$$
$$z = z_0 + ct$$

des génératrices rectilignes de (5) en utilisant les égalités

$$x_1 = x_0 - u\frac{a}{b}y_1\left(-\frac{z_0}{c}\right),$$
$$y_1 = y_0 + u\frac{b}{a}x_1\left(-\frac{z_0}{c}\right),$$
$$0 = z_0 + c\left(-\frac{z_0}{c}\right)$$

qui signifient que pour $t = -\frac{z_0}{c}$ on a le point $(x_1, y_1, 0)$. On pose donc $t' = t + \frac{z_0}{c}$, on supprime les accents et on aboutit, pour les génératrices rectilignes, aux mêmes équations où $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$ et $z_0 = 0$. Ainsi, on a la

Proposition 2. *Toute génératrice rectiligne de l'hyperboloïde à une nappe coupe son ellipse de gorge. Les équations paramétriques des génératrices rectilignes passant par le point (x_1, y_1) de l'ellipse de gorge sont de la forme*

$$x = x_1 - u\cdot\frac{a}{b}y_1 t,$$
$$y = y_1 + u\frac{b}{a}x_1 t,$$
$$z = ct,$$

où $u = \pm 1$. □

Deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde (5) sont dites *de même sens* s'il leur correspond une même valeur de u. On partage donc toutes les génératrices en deux classes suivant qu'elles ont ou non même sens. On dit d'ordinaire de ces classes qu'elles constituent deux *familles* de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde (5).

Théorème 1 (propriétés des génératrices rectilignes, de l'hyperboloïde à une nappe). *On dit que*

A. *Par tout point de l'hyperboloïde à une nappe il passe une génératrice rectiligne de chaque famille et une seule.*

B. *Deux génératrices quelconques de sens contraires de l'hyperboloïde à une nappe sont dans un même plan.*

C. *Deux génératrices non confondues quelconques de même sens de l'hyperboloïde à une nappe sont non coplanaires.*

D. *L'hyperboloïde à une nappe ne possède pas trois génératrices de même sens distinctes deux à deux qui soient parallèles à un plan.*

Démonstration. La propriété **A** a été en fait démontrée. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points de l'ellipse de gorge. Selon la proposition 1, les vecteurs directeurs de deux génératrices rectilignes distinctes passant par ces points s'écrivent

$$\left(-u_1\frac{a}{b}y_1,\ u_1\frac{b}{a}x_1,\ c\right),\qquad \left(-u_2\frac{a}{b}y_2,\ u_2\frac{b}{a}x_2,\ c\right),$$

avec $u_1 = \pm 1$, $u_2 = \pm 1$, si bien que les génératrices sont non coplanaires si et seulement s'il y a non-nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ -u_1\frac{a}{b}y_1 & u_1\frac{b}{a}x_1 & c \\ -u_2\frac{a}{b}y_2 & u_2\frac{b}{a}x_2 & c \end{vmatrix} =$$

$$= -u_2abc\left[\frac{(x_2-x_1)(x_2-ux_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2-uy_1)}{b^2}\right],$$

avec $u = u_1u_2$. Mais on a

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2-ux_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2-uy_1)}{b^2}=\frac{(x_2-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)^2}{b^2}>0$$

si $u = 1$ (les égalités $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ sont impossibles pour $u = 1$ car on aurait les génératrices identiques) et

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2-ux_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2-uy_1)}{b^2}=$$

$$=\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0$$

si $u = -1$, i.e. on a les propriétés **B** et **C**.

Voyons ce qui en est de D. Il suffit d'établir que pour trois points quelconques (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) distincts deux à deux de l'ellipse de gorge les vecteurs

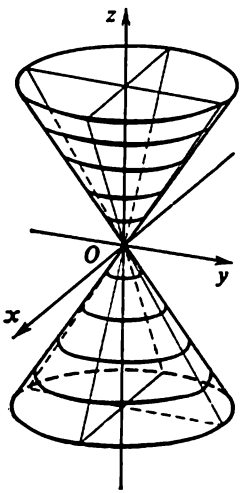
$$\left(-u\frac{a}{b}y_1,\ u\frac{b}{a}x_1,\ c\right),$$
$$\left(-u\frac{a}{b}y_2,\ u\frac{b}{a}x_2,\ c\right),$$
$$\left(-u\frac{a}{b}y_3,\ u\frac{b}{a}x_3,\ c\right),$$

où $u = \pm 1$, ne soient pas coplanaires, i.e. le déterminant

$$\begin{vmatrix} -u\frac{a}{b}y_1 & u\frac{b}{a}x_1 & c \\ -u\frac{a}{b}y_2 & u\frac{b}{a}x_2 & c \\ -u\frac{a}{b}y_3 & u\frac{b}{a}x_3 & c \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

est non nul. Or, il en est ainsi du moment que ces points ne sont pas alignés. □

* * *



Cône du second degré

Revenons à notre liste des quadriques.

[6] Ces surfaces repérées par un système de coordonnées rectangulaires x, y, z sont définies par une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6}$$

où $a \geqslant b > 0$, $c > 0$ et $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$, et portent le nom de *cônes réels du second degré*.

Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie du cône (6), et l'origine en est le centre de symétrie.

En général, on appelle *cône* une surface réglée dont toutes les génératrices rectilignes passent par un point unique, le *sommet* du cône.

Quel que soit le point M_0 (x_0, y_0, z_0) de (6) autre que O (0, 0, 0), la surface contient tout point (tx_0, ty_0, tz_0), i.e. chaque point de la droite OM_0:

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2} + \frac{(ty_0)^2}{b^2} - \frac{(tz_0)^2}{c^2} = t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0.$$

Ainsi, la surface (6) est bien un cône.

La *directrice* du cône est par définition une ligne quelconque de cette surface qui jouit de la propriété suivante : toute génératrice rectiligne coupe la directrice en un point et un seul.

La directrice du cône (6) est par exemple sa section par un plan arbitraire de la forme $z = h$, $h \neq 0$. Cette section est une ellipse de demi-axes

$$\frac{a}{c}|h|, \quad \frac{b}{c}|h|$$

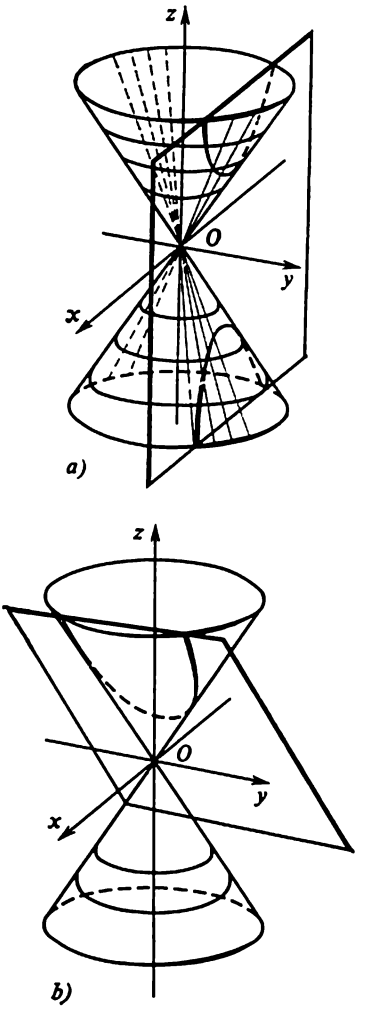
qui augmentent de façon monotone de 0 à $+\infty$ avec $|h|$. La droite passant par les centres des ellipses obtenues pour divers h, i.e. l'axe Oz, s'appelle l'*axe du cône*. Chose curieuse, la section du cône (6) par des plans non perpendiculaires à l'axe est une circonférence (démontrer !). Aussi le cône (6) est dit être un *cône circulaire* ou encore un *cône circulaire oblique* (si l'axe du cône ne passe en général pas par le centre de la circonférence). Si l'axe du cône passe par le centre de la circonférence (ce qui a lieu dans le cas où le plan de la circonférence est perpendiculaire à l'axe, i.e. si $a = b$, et dans ce cas seulement), on dit que le cône est *circulaire droit*.

Les directrices du cône (6), ou plus exactement de ce cône moins deux génératrices, sont également les sections du cône par les plans $y = h$, $x = h$, $h \neq 0$, i.e. les hyperboles de demi-axes

$$\frac{c}{b}|h|, \quad \frac{a}{b}|h| \quad \text{et}$$

$$\frac{c}{a}|h|, \quad \frac{b}{a}|h|$$

qui sont croissants de 0 à $+\infty$ avec $|h|$.



Sections du cône du second degré qui sont *a*) une hyperbole, *b*) une parabole

Le plan $z = 0$ rencontre la surface (6) en un point, et les plans $y = 0$, $x = 0$ la coupent suivant deux droites (deux génératrices).

A part les ellipses et les hyperboles, les sections du cône (6)

par des plans (et ses génératrices) peuvent être des paraboles. C'est, par exemple, le cas des sections par tout plan $z = \frac{c}{a}x + h$, $h \neq 0$. En effet, les nombres x, y sont les coordonnées affines (et non rectangulaires !) du plan, et la courbe découpée dans le plan par le cône (6) est définie en ces coordonnées par

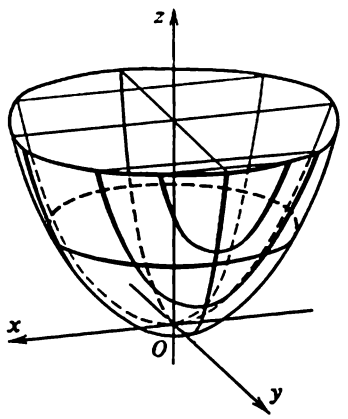
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\left(\frac{c}{a}x + h\right)^2}{c^2} = 0.$$

On a par des transformations élémentaires

$$y^2 = 2\frac{hb^2}{ac}\left(x + \frac{ha}{2c}\right),$$

équation qui démontre avec évidence qu'il s'agit d'une parabole.

Ainsi, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des sections planes du cône (6), d'où leur nom de *sections coniques* (ou *coniques* tout court).



Paraboloïde elliptique

* * *

[7] Ces surfaces sont représentées dans un système de coordonnées rectangulaires x, y, z, par l'équation

$$(7) \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

où $p \geqslant q > 0$, et s'appellent les *paraboloïdes elliptiques*.

Le plan $z = h$ ne coupe pas le paraboloïde (7), il le rencontre en un seul point (0, 0, 0) ou le coupe suivant une ellipse de demi-axes

$$\sqrt{2hp}, \quad \sqrt{2hq},$$

croissant de 0 à $+\infty$ avec h selon que $h < 0$, $h = 0$ ou $h > 0$.

Les plans $y = h$ et $x = h$ coupent (7) suivant des paraboles de paramètres p et q, de sommets $\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$ et $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$ qui tournent leur concavité vers le haut.

Les plans $x = 0$, $y = 0$ sont des plans de symétrie du paraboloïde (7). Ce sont les seuls pour $p \neq q$.

Il est clair que le paraboloïde elliptique (à l'instar de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes) n'est pas une surface réglée.

* * *

[8] Ces surfaces appelées *paraboloïdes hyperboliques* sont décrites en des coordonnées rectangulaires x, y, z par une équation de la forme

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{8}$$

où $p > 0$, $q > 0$.

De toutes les surfaces de degré 2, le paraboloïde hyperbolique se prête le plus difficilement à une interprétation géométrique.

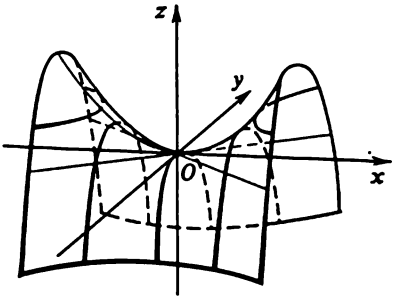
Le plan $z = h$, $h < 0$, coupe le paraboloïde (8) suivant une hyperbole de demi-axes

$$\sqrt{-2qh}, \quad \sqrt{-2ph}$$

qui décroissent de $+\infty$ à 0 avec h augmentant de $-\infty$ à 0. L'axe réel de cette hyperbole est parallèle à l'axe Ox et l'axe imaginaire l'est à l'axe Oy.

Le plan $z = 0$ coupe (8) suivant deux droites qui s'écrivent (en coordonnées x, y)

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,$$



Paraboloïde hyperbolique

et la section du paraboloïde (8) par le plan $z = h$, $h > 0$, est une hyperbole de demi-axes

$$\sqrt{2ph}, \quad \sqrt{2qh}$$

croissant de 0 à $+\infty$ avec h. Contrairement au cas $h < 0$, cette hyperbole a son axe réel parallèle à l'axe Oy et son axe imaginaire parallèle à l'axe Ox.

Les plans $y = h$, $x = h$ coupent la surface étudiée suivant des paraboles de paramètres p, q et de sommets $\left(0, h, -\frac{h^2}{2q}\right)$ et $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$. La première parabole tourne sa concavité vers le haut et la deuxième vers le bas. Les sommets des paraboles découpées par les plans $y = h$ sont sur la parabole définie par $x = 0$ et ceux des paraboles découpées par les plans $x = h$ sur la parabole formée par $y = 0$.

Les plans $x = 0$, $y = 0$ sont les plans de symétrie du paraboloïde hyperbolique (8).

Proposition 3. *Le paraboloïde hyperbolique est une surface doublement réglée.*

Démonstration. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque du paraboloïde (8). Si la droite

$$x = x_0 + tl,$$
$$y = y_0 + tm,$$
$$z = z_0 + tn$$

passant par M_0 est tout entière sur la surface (8), on a identiquement en t

$$\frac{(x_0+tl)^2}{p}-\frac{(y_0+tm)^2}{q}=2(z_0+tn),$$

i.e.

$$t^2\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)+2t\left(\frac{lx_0}{p}-\frac{my_0}{q}-n\right)=0,$$

ce qui n'est possible que pour

$$\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}=0$$

et

$$\frac{lx_0}{p}-\frac{my_0}{q}-n=0.$$

Ces équations admettent à un facteur de proportionnalité près deux solutions

$$l:m:n=\sqrt{p}:u\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right),$$

$u=\pm 1$, et deux seulement.

Inversement, il est immédiat de vérifier que les deux droites

$$x=x_0+t\sqrt{p},$$

$$y=y_0+ut\sqrt{q},$$

$$z=z_0+t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

sont tout entières sur le paraboloïde (8). □

Si $\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\neq 0$, alors les génératrices rectilignes obtenues coupent pour $t=t_1$, où

$$t_1=-\frac{z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right),$$

le plan $z=0$ et, partant, l'une des droites

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ ou } \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$$

du plan qui sont sur le paraboloïde. Comme

$$\frac{x_0+t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0+ut_1\sqrt{q}}{\sqrt{q}}=\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)+2t_1=0,$$

cette droite est

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + u\frac{y}{\sqrt{q}} = 0$$

d'équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= \tau\sqrt{p}, \\ y &= -\tau u\sqrt{q}, \end{aligned} \qquad -\infty < \tau < +\infty.$$

Ceci étant, le point d'intersection $(x_0 + t_1\sqrt{p},\ y_0 + ut_1\sqrt{q})$ est associé à la valeur non nulle

$$\tau_1 = \frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

du paramètre τ. Géométriquement, le nombre τ_1 est égal au quotient de la distance du point d'intersection à l'origine par la longueur du vecteur $(\sqrt{p},\ -u\sqrt{q})$, i.e. par $\sqrt{p+q}$.

On pose $t' = t - t_1$ et on a

$$x = x_0 + t\sqrt{p} = (x_0 + t_1\sqrt{p}) + (t - t_1)\sqrt{p} = (t' + \tau_1)\sqrt{p},$$

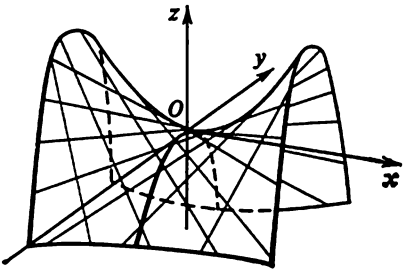
$$y = y_0 + tu\sqrt{q} = (y_0 + t_1 u\sqrt{q}) + u(t - t_1)\sqrt{q} = \\ = u(t' - \tau_1)\sqrt{q},$$

$$z = z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = (t - t_1)\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = 2t'\tau_1.$$

Si $\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} = 0$, donc $z_0 = 0$ (conformément à (8)), la génératrice rectiligne considérée est contenue dans le plan $z = 0$ et passe par l'origine. On pose de nouveau $t' = t - t_1$ et on écrit les équations paramétriques de la génératrice:

$$x = t'\sqrt{p}, \quad y = ut'\sqrt{q}, \quad z = 0,$$

i.e. on retrouve le résultat ci-dessus, mais avec $\tau_1 = 0$.



Génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique

Avec les notations $t' = t$ et $\tau_1 = \tau$, on a la

Proposition 4. *Chaque génératrice rectiligne du paraboloïde hyperbolique* (8) *peut, ou bien couper le plan* $z = 0$, *ou bien être dans ce plan. Ses équations paramétriques s'écrivent*

$$x = (t + \tau)\sqrt{p},$$
$$y = u\,(t - \tau)\sqrt{q},$$
$$z = 2t\tau,$$

où $u = \pm 1$, *et le nombre* τ *est soit* 0 (*si la génératrice est tout entière dans le plan* $z = 0$), *soit égal au quotient de la distance de l'origine au point d'intersection de la génératrice et du plan* $z = 0$ *par* $\sqrt{p + q}$. □

Comme dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, deux génératrices rectilignes sont de *même sens* (ou appartiennent à une même *famille*) s'il leur correspond une même valeur de u.

Théorème 2 (propriétés des génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique). *On dit que*

A. *Par tout point du paraboloïde hyperbolique il passe une génératrice rectiligne de chaque famille et une seule.*

B. *Deux génératrices quelconques de sens contraires du paraboloïde hyperbolique se coupent (et sont donc dans un même plan).*

C. *Deux génératrices non confondues quelconques de même sens du paraboloïde hyperbolique sont non coplanaires.*

D. *Toutes les génératrices d'une même famille sont parallèles à un même plan.*

On voit que les propriétés des génératrices du paraboloïde hyperboliques sont parfaitement analogues à celles des génératrices de l'hyperboloïde à une nappe (la propriété **B** étant dépourvue de parallélisme est même plus forte). La seule différence essentielle provient de la propriété **D**.

Démonstration du théorème 2. La propriété **A** est en fait démontrée. Pour que deux génératrices

$$\begin{aligned} x &= (t + \tau_1)\sqrt{p}, & x &= (t + \tau_2)\sqrt{p}, \\ y &= u_1\,(t - \tau_1)\sqrt{q}, \text{ et} & y &= u_2\,(t - \tau_2)\sqrt{q}, \\ z &= 2t\tau_1 & z &= 2t\tau_2 \end{aligned}$$

soient coplanaires, il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \tau_2\sqrt{p} - \tau_1\sqrt{p} & -u_2\tau_2\sqrt{q} + u_1\tau_1\sqrt{q} & 0 \\ \sqrt{p} & u_1\sqrt{q} & 2\tau_1 \\ \sqrt{p} & u_2\sqrt{q} & 2\tau_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\sqrt{pq}\,(u_1 + u_2)\,(\tau_2 - \tau_1)^2$$

soit nul. Ainsi, on a la propriété C. On démontre B si l'on remarque qu'étant donné

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p} & u_1\sqrt{q} \\ \sqrt{p} & u_2\sqrt{q} \end{vmatrix} = \sqrt{pq}\,(u_2-u_1),$$

deux génératrices de familles différentes ne peuvent être parallèles.

On constate enfin que tous les vecteurs de la forme $(\sqrt{p},\ u\sqrt{q},\ 2\tau)$ sont parallèles au plan

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - u\,\frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

ce qui prouve D. □

* * *

[9] Les surfaces de ce type sont décrites en des coordonnées rectangulaires x, y, z par l'équation

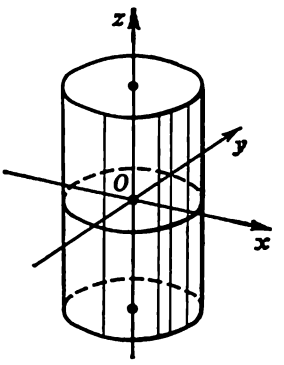
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{9}$$

où

$$a \geqslant b > 0.$$

Il s'agit des *cylindres elliptiques.*

Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie du cylindre (9) et l'origine en est le centre de symétrie. Si $a \neq b$, il n'y a pas d'autres plans de symétrie.



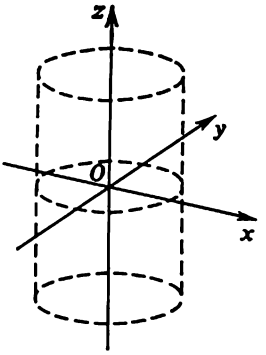
Cylindre elliptique

En général, on appelle *cylindre* une surface réglée dont toutes les génératrices rectilignes sont parallèles. Si le cylindre possède le centre de symétrie, la parallèle aux génératrices par le centre est l'*axe du cylindre* (qui en est l'axe de symétrie).

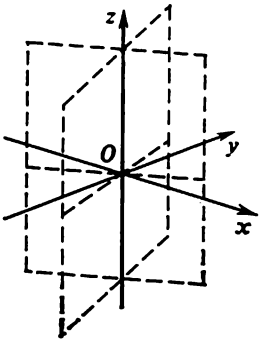
Il est clair que quel que soit le point M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ de la surface (9), chaque point $(x_0,\ y_0,\ z)$, i.e. chaque point de la droite passant par $(x_0,\ y_0)$ parallèlement à l'axe Oz, appartient à (9). Ainsi, la surface (9) est bien un cylindre. Son axe est l'axe Oz.

La *directrice* du cylindre est par définition sa courbe quelconque que chaque génératrice coupe en un point et un seul. En particulier, les directrices planes sont exactement les courbes découpées par les plans non parallèles aux génératrices. Chaque plan $z = h$ (perpendiculaire aux génératrices du cylindre (9)) le coupe par exemple suivant une ellipse définie en les coordonnées x, y du plan par l'équation (9). Cela explique le terme « cylindre elliptique ».

Le lecteur est prié de démontrer la propriété intéressante, pour une directrice du cylindre (9), d'être une circonférence. Aussi les cylindres elliptiques s'appellent également les *cylindres circulaires.*



Cylindre elliptique imaginaire



Deux plans imaginaires

Ceux-ci sont dits *obliques* si le plan engendrant la circonférence n'est pas perpendiculaire à l'axe et *droits* dans le cas contraire, i.e. si $a = b$. Ce sont ces cylindres qu'on étudie en école secondaire.

* * *

Toutes les autres quadriques sont également des cylindres (dont les directrices sont d'autres courbes du second degré).

[10] Surfaces définies dans un système de coordonnées rectangulaires x, y, z par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{10}$$

où $a \geqslant b > 0$. Elles ne possèdent pas de points réels, d'où leur nom de *cylindres elliptiques imaginaires.*

[11] Ces surfaces s'écrivent en des coordonnées rectangulaires x, y, z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{11}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

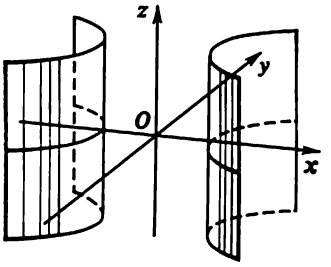
Les points réels de chaque surface forment une droite. Dans le cas d'un ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)-espace, (11) est un couple de plans imaginaires

(complexes conjugués) qui se coupent suivant la droite réelle.

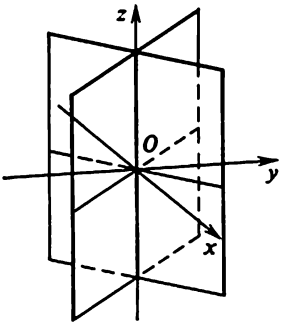
[12] Dans un système de coordonnées rectangulaires x, y, z, ces surfaces ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12}$$

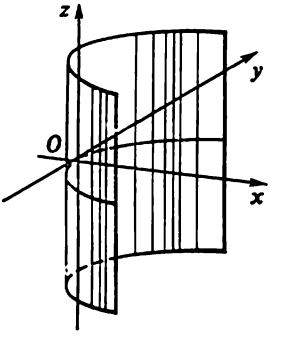
avec $a > 0$, $b > 0$. Chaque plan $z = h$ coupe le *cylindre hyperbolique*



Cylindre hyperbolique



Deux plans sécants



Cylindre parabolique

(12) suivant une parabole définie en x, y du plan par l'équation (12).

[13] L'équation de ces surfaces rapportées à un système de coordonnées rectangulaires x, y, z s'écrit

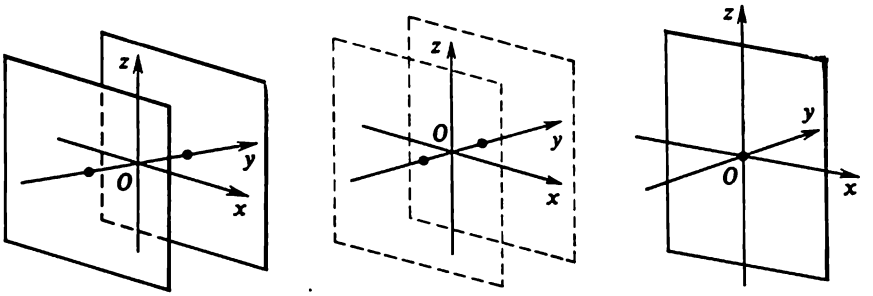
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{13}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. Il s'agit chaque fois de deux plans sécants.

[14] Les surfaces définies en un système de coordonnées rectangulaires x, y, z par l'équation

$$y^2 = 2px, \tag{14}$$

$p > 0$, s'appellent les *cylindres paraboliques*. Chaque plan $z = h$ coupe (14) suivant une parabole définie en x, y du plan par (14).



Deux plans parallèles distincts — Deux plans distincts imaginaires — Deux plans confondus

[15] Ces surfaces se définissent en des coordonnées rectangulaires x, y, z par une équation de la forme

$$y^2 - b^2 = 0, \tag{15}$$

où $b > 0$. Ce sont les couples de plans parallèles distincts.

[16] L'équation de ces surfaces rapportées à un système de coordonnées rectangulaires x, y, z est de la forme

$$y^2 + b^2 = 0, \tag{16}$$

$b > 0$. Il s'agit d'un couple de plans imaginaires (complexes conjugués et distincts).

[17] L'équation des surfaces en des coordonnées rectangulaires x, y, z est

$$y^2 = 0. \tag{17}$$

On assimile chaque surface de ce type à deux plans confondus.

* * *

Un *théorème de classification* dit que l'espace euclidien ne possède pas d'autres surfaces du second degré, toute surface étant définie dans deux systèmes de coordonnées rectangulaires par une même équation. Ainsi, on dresse la liste complète des quadriques:

a) ellipsoïdes (réels [1] et imaginaires [2]),
b) hyperboloïdes (à une nappe [5] et à deux nappes [4]),
c) paraboloïdes (elliptiques [7] et hyperboliques [8]),
d) cônes du second degré (imaginaires [3] et réels [6]),

e) cylindres du second degré (elliptiques réels [9], elliptiques imaginaires [10], paraboliques [14] et hyperboliques [12]),

f) deux plans (sécants imaginaires [11], sécants réels [13], parallèles distincts réels [15], parallèles imaginaires [16], confondus réels [17]).

La démonstration du théorème sera faite dans le Livre II, où nous le généraliserons au cas d'espaces de dimension quelconque.

LEÇON 24

Coordonnées de la droite.— Faisceaux de droites.— Faisceaux propres et faisceaux impropres.— Plans complétés.— Modèles de la géométrie du complété projectif du plan affine.

Dans les leçons précédentes, l'élément de base de la géométrie a été le point, mais on peut édifier une géométrie basée, disons, sur les droites. Plaçons-nous d'abord dans le plan (affine).

Etant donné, dans le plan, un système de coordonnées affines x, y, toute droite du plan est caractérisée par trois nombres A, B, C, coefficients de son équation

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Ces nombres définissent la droite de façon unique comme c est le cas pour les coordonnées et le point. Il est donc naturel qu'on les appelle les *coordonnées de la droite*. Il y a cependant une différence avec le cas du point. Si le point définit bien ses coordonnées, les coordonnées de la droite sont définies à un facteur de proportionnalité près. On dit que les coordonnées de la droite sont *homogènes*. Ce fait sera noté $(A : B : C)$ pour une droite de coordonnées A, B, C.

Une autre différence est que *tout triplet* de nombres A, B, C *ne peut être* le triplet de coordonnées de la droite: il faut que A ou B soit non nul (le nombre C n'est assujetti à aucune condition). Ce caractère privilégié de C détermine, on le verra, divers inconvénients et restrictions, mais il faut pour l'instant en prendre son parti.

Si la droite (1) a le coefficient A non nul, on la caractérise par les *coordonnées non homogènes* $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ définies univoquement par la droite. On représente donc les droites par les points du plan $\left(\text{dans notre cas le point représentatif est } \left(\frac{B}{A}, \frac{C}{A}\right)\right)$. Mais cette façon de procéder exclut les droites avec $A = 0$. L'avantage des coordonnées homogènes est justement de garantir la généralité.

* * *

On sait que les coordonnées des points $M(x, y)$ de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ non confondus s'expriment

par les formules

$$x = (1 - t)\, x_0 + tx_1, \quad y = (1 - t)\, y_0 + ty_1.$$

Etant données deux droites distinctes quelconques $(A_0 : B_0 : C_0)$ et $(A_1 : B_1 : C_1)$ de coordonnées non homogènes respectives $\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{C_0}{A_0}\right)$, $\left(\frac{B_1}{A_1}, \frac{C_1}{A_1}\right)$, on introduit de façon analogue toutes les droites $(A : B : C)$ telles que

$$(2) \qquad \frac{B}{A} = (1-t)\frac{B_0}{A_0} + t\frac{B_1}{A_1}, \quad \frac{C}{A} = (1-t)\frac{C_0}{A_0} + t\frac{C_1}{A_1}.$$

L'ensemble de ces droites est un analogue de la droite passant par deux points.

On récrit (2)

$$\frac{B}{A} = \frac{(1-t)\, A_1B_0 + tA_0B_1}{A_0A_1} = \frac{[(1-t)\, A_1]\, B_0 + [tA_0]\, B_1}{[(1-t)\, A_1]\, A_0 + [tA_0]\, A_1},$$

$$\frac{C}{A} = \frac{(1-t)\, A_1C_0 + tA_0C_1}{A_0A_1} = \frac{[(1-t)\, A_1]\, C_0 + [tA_0]\, C_1}{[(1-t)\, A_1]\, A_0 + [tA_0]\, A_1},$$

il vient

$$A = [(1 - t)\, \rho A_1]\, A_0 + [t\rho A_0]\, A_1,$$
$$B = [(1 - t)\, \rho A_1]\, B_0 + [t\rho A_0]\, B_1,$$
$$C = [(1 - t)\, \rho A_1]\, C_0 + [t\rho A_0]\, C_1$$

pour les coefficients A, B, C, ρ étant un facteur de proportionnalité arbitraire. On pose

$$\mu = (1 - t)\, \rho A_1, \quad \nu = t\rho A_0,$$

et on obtient

$$(3) \qquad \begin{aligned} A &= \mu A_0 + \nu A_1, \\ B &= \mu B_0 + \nu B_1, \\ C &= \mu C_0 + \nu C_1. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé les coordonnées non homogènes (i.e. toutes les droites ont été supposées non parallèles à l'axe des ordonnées). Il se trouve que les formules (3) ont un sens pour $(A_0 : B_0 : C_0)$, $(A_1 : B_1 : C_1)$ quelconques et définissent pour toutes les valeurs admissibles des paramètres μ et ν (autrement dit, on a, ou bien $A \neq 0$, ou bien $B \neq 0$) une droite $(A : B : C)$. D'ailleurs, le seul cas intéressant est celui de $(A_0 : B_0 : C_0)$ et $(A_1 : B_1 : C_1)$ distinctes parce qu'avec $(A_0 : B_0 : C_0) = (A_1 : B_1 : C_1)$, on obtient une même droite $(A_0 : B_0 : C_0)$ quels que soient μ et ν.

* * *

Ces résultats permettent la

Définition 1. L'ensemble de toutes les droites $(A : B : C)$ données par les formules (3) pour les valeurs admissibles quelconques des paramètres μ, ν s'appelle le *faisceau de droites* caractérisé par les droites $(A_0 : B_0 : C_0)$, $(A_1 : B_1 : C_1)$ (supposées distinctes).

Ainsi, les faisceaux de droites constituent des analogues des droites en géométrie des points.

Si l'on pose $f = A_0x + B_0y + C_0$ et $g = A_1x + B_1y + C_1$, alors les droites du faisceau (3) ont pour équation

$$\mu f + \nu g = 0.$$

Cette écriture s'avère des fois très commode.

* * *

Au lieu des équations paramétriques, on emploie, pour définir les droites du plan, les équations (1). Leurs correspondants en géométrie des droites sont les ensembles des droites $(A : B : C)$ définies à partir des conditions

$$K\left(\frac{B}{A}\right) + L\left(\frac{C}{A}\right) + M = 0$$

qui s'écrivent de façon plus générale (sans la condition $A \neq 0$)

$$KB + LC + MA = 0,$$

avec K, L, M des nombres fixes. En changeant partiellement les notations, la dernière relation s'écrit

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 = 0, \tag{4}$$

où X_0, Y_0, Z_0 sont des nombres. Pour imiter le cas « ponctuel », on devrait supposer qu'au moins l'un des X_0, Y_0 est non nul. Soucieux de généraliser (et de « symétriser »), nous exigerons qu'au moins l'un des X_0, Y_0, Z_0 soit $\neq 0$ (sinon la relation (4) est vérifiée identiquement).

Chose remarquable, cette approche de la notion de faisceau conduit au même résultat :

Proposition 1. *Un ensemble de droites est un faisceau de droites si et seulement si ses éléments* $(A : B : C)$ *sont caractérisés par une équation de la forme* (4).

On dit donc que la relation (4) est l'*équation du faisceau.*

Avant de démontrer la proposition, on établit le

Lemme. *Si deux droites distinctes* $(A_0 : B_0 : C_0)$ *et* $(A_1 : B_1 : C_1)$ *satisfont à la relation* (4), *le faisceau* (3) *défini par ces droites coïncide avec l'ensemble de droites vérifiant la relation* (4).

Démonstration. Si la droite $(A : B : C)$ appartient au faisceau (3), alors

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 =$$
$$= (\mu A_0 + \nu A_1) X_0 + (\mu B_0 + \nu B_1) Y_0 + (\mu C_0 + \nu C_1) Z_0 =$$
$$= \mu (A_0X_0 + B_0Y_0 + C_0Z_0) + \nu (A_1X_0 + B_1Y_0 + C_1Z_0) = 0$$

Inversement, soit $(A : B : C)$ une droite vérifiant la relation (4). La matrice

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}$$

a ses colonnes linéairement dépendantes, et il en est donc de même de ses lignes. Or, deux dernières lignes ne sont pas proportionnelles par hypothèse, i.e. elles sont linéairement indépendantes. Aussi la première ligne s'exprime linéairement au moyen des deux autres, ce qui veut dire que la droite $(A : B : C)$ appartient au faisceau (3). □

Démonstration de la proposition 1. Soit le faisceau (3) et soit le système de deux équations linéaires homogènes à trois inconnues

$$A_0X + B_0Y + C_0Y = 0,$$
$$A_1X + B_1Y + C_1Z = 0.$$

Il est connu en algèbre que ce système possède nécessairement une solution non triviale $(X_0, Y_0, Z_0) \neq (0, 0, 0)$. Cette solution fournit la relation (4) pour laquelle les droites données remplissent les conditions du lemme. Par conséquent, le faisceau (3) est caractérisé par (4).

Inversement, soit (4). Il suffit, pour appliquer le lemme et prouver le résultat voulu, de trouver deux triplets (A_0, B_0, C_0), (A_1, B_1, C_1) non proportionnels vérifiant (4) qu'on puisse assimiler aux triplets de coordonnées des droites (i.e. tels qu'au moins l'un des A_0, B_0 ou des A_1, B_1 respectivement soit $\neq 0$). La chose est facile. En effet, si, disons, $Z_0 \neq 0$, on pose

$$A_0 = Z_0, \quad B_0 = 0, \quad C_0 = -X_0,$$
$$A_1 = 0, \quad B_1 = Z_0, \quad C_1 = -Y_0. \ \square$$

Etant donnée la proposition 1, il y a intérêt à interpréter géométriquement la relation (4).

* * *

On suppose $Z_0 \neq 0$. On pose $x_0 = \frac{X_0}{Z_0}$, $y_0 = \frac{Y_0}{Z_0}$ et on récrit (4)

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

ce qui veut dire que la droite $(A : B : C)$ passe par le point M_0 (x_0, y_0). Ainsi, *l'ensemble de toutes les droites passant par le point donné M_0 est un faisceau.* □

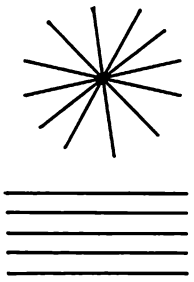
Définition 2. Les faisceaux d'équation (4), avec $Z_0 \neq 0$, sont dits *propres*. Le point M_0 intersection des droites d'un faisceau propre est son *centre*.

On dit des faisceaux définis par (4), où $Z_0 = 0$, qu'ils sont *impropres*.

Ainsi, les droites d'un faisceau impropre sont caractérisées par une équation de la forme

$$AX_0 + BY_0 = 0,$$

qui signifie, on le sait, le parallélisme de la droite $(A : B : C)$ et du vecteur de coordonnées X_0, Y_0. On dit donc que *les faisceaux impropres sont exactement les ensembles de toutes les droites parallèles deux à deux* (i.e. ces droites ont même vecteur directeur a (X_0, Y_0)). □



Faisceaux de droites

On observe que le faisceau propre (3) vérifie la relation

$$\frac{A_1}{A_0} \neq \frac{B_1}{B_0},$$

si bien qu'on obtient une même droite $(A : B : C)$ pour toutes les valeurs de μ et ν. S'agissant d'un faisceau impropre, il existe des couples (μ, ν) « interdits » tels que $\mu : \nu = -A_1 : A_0$ (i.e. tels qu'il ne leur corresponde aucune droite).

Les affirmations démontrées forment la

Proposition 2. *Pour deux droites sécantes quelconques $f = 0$, $g = 0$, chaque droite de la forme*

$$\mu f + \nu g = 0 \tag{5}$$

passe par leur point d'intersection M_0, et, inversement, toute droite passant par M_0 est définie par (5).

De même, pour deux droites parallèles quelconques $f = 0$, $g = 0$, chaque droite (5) *leur est parallèle, et, inversement, chaque droite parallèle à $f = 0$, $g = 0$ s'écrit sous la forme* (5).

Dans le premier cas, l'équation (5) *définit une droite pour μ et ν quelconques, et dans le second, on a une exception unique (à un facteur de proportionnalité près) correspondant à $\mu : \nu = -A_1 : A_0$.* □

Bien que les faisceaux ne figurent pas explicitement dans la proposition 2 (qu'on peut donc démontrer en d'autres termes), c'est à partir de la notion de faisceau qu'on élucide complètement son sens géométrique.

* * *

On ne saurait s'accomoder des réserves faites ni des rôles non tout à fait symétriques des points et des droites. Les résultats obtenus sont assez formels: ces inconvénients tiennent à l'absence de centres aux faisceaux impropres. Voyons comment on y remédie.

Puisque tous les points du plan constituent autant de centres des faisceaux propres, on a à le *compléter* par adjonction de points « impropres ». On en ajoute autant qu'il y a de faisceaux impropres, i.e. de classes de droites parallèles. Car s'il y en a moins, certains faisceaux resteront sans centre, et s'il y en a plus, le plan aura des points autres que les centres des faisceaux. On est conduit à la

Définition 3. L'ensemble $\mathcal{A}^+$ s'appelle le *plan complété* si l'on définit sur le plan affine $\mathcal{A}$ l'application $d \mapsto d^+$ de l'ensemble de toutes les droites d de $\mathcal{A}$ sur le complémentaire $\mathcal{A}^+ \setminus \mathcal{A}$ tel que

a) tout élément de $\mathcal{A}^+ \setminus \mathcal{A}$ s'écrive d^+ pour une droite d;

b) $d_1^+ = d_2^+$ si et seulement s'il y a parallélisme de d_1 et d_2.

Le plan complété $\mathcal{A}^+$ s'appelle également le *complété projectif du plan affine*, et il est régi par une géométrie spéciale.

Les éléments du complémentaire $\mathcal{A}^+ \setminus \mathcal{A}$ sont les *points impropres* du plan complété $\mathcal{A}^+$, et les points de $\mathcal{A}$ en sont les *points propres*.

On appelle droites (propres) du plan $\mathcal{A}^+$ les droites d de $\mathcal{A}$ munies chacune d'un point impropre d^+. La notation est encore d, si bien que le point d^+ est le point impropre de la *droite* d. On comprend des fois par droite d la droite primitive du plan $\mathcal{A}$.

Ainsi, l'« excroissance » $\mathcal{A}^+ \setminus \mathcal{A}$ jouit d'une propriété spéciale aux droites: elles rencontre chaque droite d en un seul point. Il s'agit donc de la *droite impropre* du plan complété $\mathcal{A}^+$.

Les *faisceaux* du plan $\mathcal{A}^+$ sont par définition les faisceaux propres de $\mathcal{A}$ (chaque droite du faisceau étant munie d'un point impropre) et les faisceaux impropres de $\mathcal{A}$ plus la droite impropre.

Ainsi, tout faisceau de $\mathcal{A}^+$ comprend toutes les droites passant par un point fixe (propre ou impropre selon qu'il s'agit d'un faisceau propre ou d'un faisceau impropre). Ce point s'appelle le *centre* du faisceau.

En géométrie du complété projectif du plan affine, par deux points distincts quelconques passe une droite et une seule (comme en géométrie affine) et deux droites distinctes quelconques ont en commun un point et un seul (propriété absente de la géométrie affine).

De même, deux droites distinctes définissent un faisceau unique (propriété vraie pour les deux géométries), et deux faisceaux distincts possèdent une seule droite commune (ce qui n'est pas juste en géométrie affine).

Nous tenons à souligner que la définition 3 ne spécifie pas le corps de base. Si le plan affine $\mathcal{A}$ est défini sur $\mathbb{K}$, alors il en est également de $\mathcal{A}^+$. En particulier, on a pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le *complété*

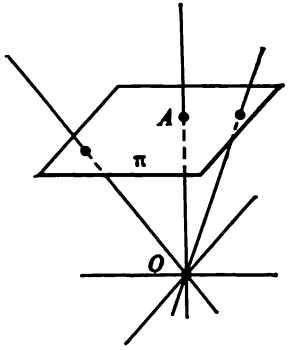
projectif complexe. Si $\mathcal{A}$ est réel-complexe, alors $\mathcal{A}^+$ s'appelle le *complété projectif réel-complexe*.

Il y a plus. Le plan $\mathcal{A}$ de la définition 3 peut très bien être le plan euclidien, auquel cas on obtient le *complété projectif du plan euclidien* qui est, ou bien réel, ou bien réel-complexe.

Ainsi, on a toute une gamme de plans régis chacun par sa « géométrie » propre. Il est donc essentiel de rapporter chaque construction géométrique et chaque théorème à une géométrie (i.e. à un plan) déterminée. Le contexte le suggère presque toujours, et le fait de le négliger risque de conduire à des conclusions erronées.

* * *

Pour avoir une idée intuitive du complété projectif du plan affine, on considère dans l'espace affine un plan π arbitraire et un point O extérieur au plan. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les droites passant par O qui coupent π. Il y a une bijection entre $\mathcal{A}$ et l'ensemble des points de π (il correspond à un point A une droite OA), si bien qu'on assimile $\mathcal{A}$ au plan affine (on dit que c'est un *modèle*, ou une *réalisation*, de la géométrie affine). Dans ce modèle, les points sont représentés par les droites OA et les droites par les ensembles des droites OA des plans passant par O (ces plans ne sont évidemment pas parallèles à π). C'est pourquoi on dit des fois que les droites du modèle sont représentées par des plans (passant par O et non parallèles à π).

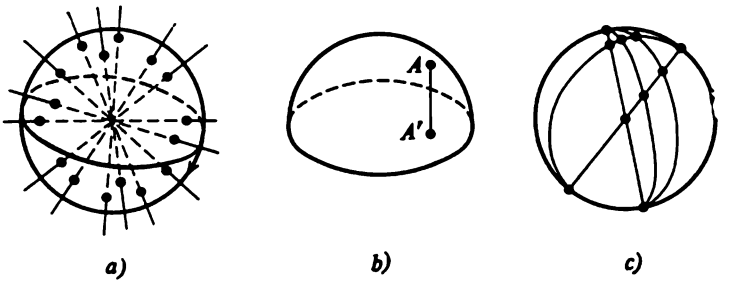


Une extension naturelle de l'ensemble $\mathcal{A}$ est l'ensemble $\mathcal{A}_O$ de *toutes* les droites de l'espace passant par O (cet ensemble porte le nom de *gerbe de droites*). Soit d une droite quelconque de $\mathcal{A}$. Elle est représentée par un plan qui passe par le point O. Il existe dans ce plan une seule parallèle par O au plan π. Acceptons cette droite comme point impropre de la droite d, auquel cas la gerbe $\mathcal{A}_O$ devient le plan affine complété appelé modèle *dans la gerbe* de la géométrie associée.

Construisons une sphère quelconque de centre O. On passe des droites aux couples de points que ces droites définissent sur la sphère. Dans ce modèle de la géométrie du plan affine complété, les points sont représentés par des couples de points antipodes (diamétralement opposés) de la sphère et les droites par les grands cercles (les circonférences que les plans passant par le centre décrivent sur la sphère). On l'appelle le modèle *sur la sphère*.

La droite impropre de ce modèle est représentée par le grand cercle (l'équateur) parallèle au plan π. Considérons l'une des demi-

sphères définies par l'équateur. Chaque droite passant par O et coupant le plan π (i.e. un point propre du modèle $\mathcal{A}_O$) rencontre la demi-sphère en un seul point. La projection orthogonale de ce point sur le plan de l'équateur est un point intérieur au cercle $\mathcal{E}$ limité par l'équateur (dans le plan passant par O parallèlement à π). Ainsi, on représente les points propres du plan $\mathcal{A}_O$ par les points intérieurs à $\mathcal{E}$. Quant aux points impropres de $\mathcal{A}_O$, on les



a) Modèle sur la sphère, *b*) passage au modèle dans le cercle, *c*) modèle dans le cercle

représente encore par les couples de points diamétralement opposés de la circonférence $\mathcal{E}$. Ce modèle de la géométrie du complété projectif du plan affine s'appelle le modèle *dans le cercle*, et on dit des fois que *le plan affine complété s'obtient d'un cercle par identification des points antipodes de la circonférence.*

Il paraît que ce dernier modèle est le plus intuitif, ne serait-ce que parce que les points propres sont représentés par des points « véritables ». Son inconvénient est que les images des droites sont en général des courbes (moitiés des ellipses). Ces courbes joignent les points diamétralement opposés de la circonférence, si bien qu'elles se coupent deux à deux. Ainsi, le modèle étudié rend parfaitement sensible le fait que deux droites distinctes du plan affine complété possèdent un point commun unique.

LEÇON 25

Coordonnées affines homogènes. — Equations des droites en coordonnées homogènes. — Courbes du second degré dans le complété projectif du plan affine. — Circonférences dans le plan euclidien complété réel-complexe. — Plans projectifs. — Coordonnées affines homogènes dans la gerbe de droites. — Formules de transformation des coordonnées affines homogènes. — Coordonnées projectives. — Courbes du second degré dans le plan projectif.

Soient $\mathscr{A}^+$ un complété projectif quelconque du plan affine, $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^+$ le plan affine de ses points propres et, dans le plan $\mathscr{A}$, le repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. On se propose d'introduire de façon raisonnable les coordonnées des points de $\mathscr{A}^+$.

Chaque point (propre ou non) du plan est le centre d'un faisceau (propre ou non). D'après la proposition 1 de la leçon 24, ce faisceau est défini de façon unique par les coefficients X, Y, Z de son équation (voir (4) de la leçon précédente ; on omet les indices de X_0, Y_0, Z_0). Il est donc naturel qu'on prenne ces coefficients pour coordonnées du point considéré. Ces coordonnées étant définies à un facteur de proportionnalité près sont *homogènes.*

Définition 1. Les coordonnées X, Y, Z s'appellent les *coordonnées affines homogènes* dans le repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

On note $(X : Y : Z)$ un point de coordonnées X, Y, Z.

La description des faisceaux propres et impropres en termes de leurs équations (leçon 24) entraîne de suite la règle suivante pour calculer explicitement les coordonnées affines homogènes (qui en est donc une autre définition).

Proposition 1. *Le point* $(X : Y : Z)$ *est un point propre si et seulement si* $Z \neq 0$, *auquel cas ses coordonnées ordinaires (non homogènes)* x, y *s'expriment par*

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z}.$$

Le point impropre $(X : Y : 0)$ *est le point impropre de la droite de vecteur directeur* $\mathbf{a}\,(l, m)$ *si et seulement si*

$$X : Y = l : m. \ \square$$

On note que *tout triplet* $(X : Y : Z) \neq (0, 0, 0)$ *est un triplet de coordonnées affines homogènes d'un point du complété projectif du plan affine.*

* * *

Passons au cas des droites. Selon la proposition 1, les coordonnées homogènes des points d'une droite quelconque $(A : B : C)$

du plan affine $\mathcal{A}$ vérifient l'équation

$$A\left(\frac{X}{Z}\right)+B\left(\frac{Y}{Z}\right)+C=0,$$

i.e.

$$(1) \qquad AX + BY + CZ = 0.$$

Si l'on se place dans $\mathcal{A}^+$, cela signifie que les coordonnées des points propres de la droite propre $(A : B : C)$ satisfont à (1). Comme le vecteur directeur de $(A : B : C)$ a, on le sait, les coordonnées B, $-A$, on en tire, par suite de la proposition 1, que le point impropre unique de cette droite a les coordonnées homogènes $(B : -A : 0)$. Ces coordonnées vérifient évidemment l'équation (1), et on dit que *dans le complété projectif du plan affine, les équations de la forme* (1) *telles que, ou bien* $A \neq 0$, *ou bien* $B \neq 0$, *définissent les droites propres.* □

Si $A = 0$, $B = 0$ et $C \neq 0$ (sinon (1) est une identité), alors l'équation (1) est vérifiée par tous les points impropres (et par ces points seulement). Par conséquent, *elle est pour* $A = 0$, $B = 0$ *l'équation de la droite impropre.*

Ainsi, toute équation (1) avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ définit une droite du complété projectif du plan affine. Autrement dit, *tout triplet de nombres* $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ *est un triplet de coordonnées homogènes d'une droite* (à l'instar de $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ qui est un triplet de coordonnées homogènes d'un point).

Du fait d'avoir introduit les points impropres, nous avons donc rétabli le « parallélisme » entre points et droites. Analytiquement, la relation (1) définit (pour A, B, C constants et X, Y, Z variables) une droite et (pour A, B, C variables et X, Y, Z constants) un faisceau, i.e. c'est une sorte d'équation de son centre.

On note que dans le plan réel-complexe, la droite impropre est la droite réelle.

* * *

Fort des résultats obtenus, on introduit la

Définition 2. On appelle *courbe du second degré* du plan affine complété (disons, complexe ou $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$) l'ensemble de ses points tels que leurs coordonnées homogènes X, Y, Z vérifient l'équation

$$(2) \qquad a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + \\ + a_{33}Z^2 = 0.$$

On définit de même une *courbe algébrique* de degré quelconque.

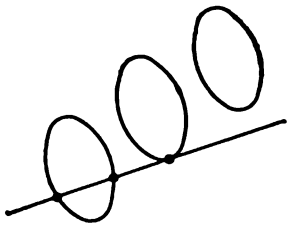
Si au moins l'un des coefficients a_{11}, a_{12}, a_{22} diffère de 0, les points propres de la courbe (2) constituent dans le plan affine une courbe de degré 2

$$(3) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dont les points impropres $(X : Y : 0)$ satisfont à

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0.$$

Ce sont donc les points impropres des directions asymptotiques de la courbe (3). Ainsi, la courbe (2) du complété projectif se déduit dans ce cas de la courbe (3) du plan affine par adjonction des points impropres des directions asymptotiques de (3).



On en tire que si (3) est un couple de droites, la courbe (2) est ces « mêmes » droites (complétées par les points impropres).

La courbe (2) est une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole* dès que (3) l'est respectivement. Ainsi, dans le plan affine complété (réel ou $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$), l'ellipse n'ayant pas de directions non asymptotiques réelles ne coupe pas la droite impropre en des points réels; la parabole rencontre la droite impropre en un seul point qui est le point impropre de son axe (on dit que la parabole est *tangente* à la droite impropre en ce point); l'hyperbole coupe la droite impropre en deux points.

Quand $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, l'équation (2) s'écrit

$$2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0,$$

et elle est donc vérifiée par les points de la droite impropre $Z = 0$ et de la droite

$$2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33}Z = 0$$

qui est propre (si ou bien $a_{13} \neq 0$, ou bien $a_{23} \neq 0$) ou impropre (si $a_{13} = 0$ et $a_{23} = 0$).

Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ et condensons les résultats obtenus en le

Théorème 1 (classification des courbes réelles du second degré dans le complété projectif réel-complexe du plan affine). *Toute courbe réelle du second degré du plan affine complété réel-complexe est l'une des onze courbes suivantes*:

[1] *Ellipse réelle* $(X^2 + Y^2 - Z^2 = 0)$.

[2] *Ellipse imaginaire* $(X^2 + Y^2 + Z^2 = 0)$.

[3] *Deux droites distinctes imaginaires (complexes conjuguées) qui se coupent en un point propre* $(X^2 + Y^2 = 0)$.

[4] *Hyperbole* $(X^2 - Y^2 - Z^2 = 0)$.

[5] *Deux droites propres distinctes réelles qui se coupent en un point propre* $(X^2 - Y^2 = 0)$.

[6] *Parabole* $(Y^2 - 2XZ = 0)$.

[7] *Deux droites propres distinctes réelles qui se coupent en un point impropre* $(Y^2 - Z^2 = 0)$.

[8] *Deux droites distinctes imaginaires (complexes conjuguées) qui se coupent en un point impropre* ($Y^2 + Z^2 = 0$).

[9] *Deux droites propres confondues réelles* ($Y^2 = 0$).

[10] *Courbe formée d'une droite propre réelle et d'une droite impropre* ($YZ = 0$).

[11] *Deux droites impropres confondues* ($Z^2 = 0$). □

Les équations entre parenthèses correspondent au choix canonique des coordonnées affines homogènes.

* * *

On obtient des résultats analogues pour le complété projectif réel-complexe du plan euclidien. Formuler ces résultats serait du temps perdu, si bien qu'on aborde le problème plus intéressant de caractériser les circonférences en géométrie du plan euclidien complété.

Les coordonnées homogènes X, Y, Z du plan euclidien complété sont naturellement assimilées aux *coordonnées rectangulaires homogènes*, i.e. elles sont définies dans le repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ étant orthonormés.

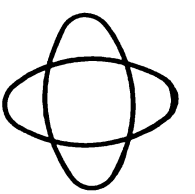
* * *

Définition 3. On appelle *circonférence* du plan euclidien complété réel-complexe une courbe du second degré définie en coordonnées rectangulaires homogènes X, Y, Z par l'équation (2), où

$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = 0.$$

Les points impropres ($X : Y : 0$) de cette circonférence se définissent par l'équation $X^2 + Y^2 = 0$, i.e. ils sont ($\pm 1 : i : 0$). Ce sont les *points cycliques* du plan euclidien complété.

Le passage de la géométrie euclidienne à celle du complété projectif du plan euclidien se fait donc par adjonction à la circonférence de deux points qui sont simultanément impropres et imaginaires.



Intersection de deux ellipses

Comme les points cycliques appartiennent à *chaque* circonférence, on ne saurait introduire d'une façon raisonnable la notion de distance entre ceux-ci et les points propres. On n'a en tout cas aucune raison de penser que cette distance est infinie. Cela montre la déficience du terme « points à l'infini » qui désigne de nos jours encore les points impropres (sans parler du fait qu'il n'a en général pas droit de cité en théorie affine).

Il y a intérêt à considérer comme circonférences les couples de droites dont au moins l'une est la droite impropre (ces « circonférences » sont caractérisées par les conditions $a_{11} = a_{22} = 0$ et

$a_{12} = 0$). On dit que *les seules courbes réelles du second degré qui passent par les points cycliques, sont les circonférences.* En effet, si l'équation (2) est vérifiée pour $X = \pm 1$, $Y = i$, $Z = 0$, alors

$$(a_{11} - a_{22}) \pm 2ia_{12} = 0,$$

d'où $a_{11} = a_{22}$ et $a_{12} = 0$.

La propriété de passer par les points cycliques est à la base de plusieurs particularités des circonférences. Voici un exemple. Deux ellipses se coupent en général en quatre points. Pourquoi deux circonférences ne peuvent avoir que deux points communs? Réponse: deux autres points sont des points cycliques.

* * *

Nous avons déjà parlé du « parallélisme » (ou de la dualité) entre points et droites en géométrie du complété projectif du plan affine. Mais il se trouve que cette harmonie n'est pas parfaite: l'existence de deux sortes de points et de deux sortes de droites (propres et impropres) apporte une dissonance des plus désagréables. Car il y a beaucoup de points impropres et une seule droite impropre! On en vient à bout en identifiant tous les points (et toutes les droites) qu'ils soient propres ou impropres.

Définition 4. Si, dans le plan affine complété, on fait abstraction des propriétés, pour les points et les droites, d'être propres ou impropres, on obtient le *plan projectif* régi par la *géométrie projective.*

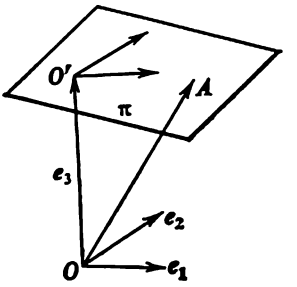
Cette définition reste valable pour le corps $\mathbb{K}$ quelconque, si bien qu'on se place en particulier dans le *plan projectif réel* et le *plan projectif complexe* ou encore dans le cas ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$).

Tout plan projectif devient le plan affine complété si l'on choisit dans ce plan une droite quelconque dont on dit que ses points sont les points impropres. Ainsi, un même plan projectif donne lieu à une infinité (si $\mathbb{K}$ est infini) de plans affines complétés, et chaque complété projectif du plan affine détermine de façon unique le plan projectif associé. On formalise donc la définition 4 en définissant le plan projectif en tant que classe de plans affines complétés qui sont équivalents en un sens évident. Au lieu de participer à cette chasse aux définitions (dont on revient bredouille des fois), nous allons nous engager dans une voie plus prometteuse.

De tous les modèles de la géométrie du plan affine complété, le modèle dans la gerbe $\mathcal{A}_O$ (et non le modèle dans le cercle par exemple) est le plus apte à devenir une interprétation de la géométrie projective (i.e. du plan projectif). En effet, il admet comme points impropres les droites dans l'espace parallèles au plan π, si bien qu'il suffit de négliger π pour obtenir un modèle de la géométrie projective. $\mathcal{A}_O$ considéré comme réalisation de la géométrie projective sera noté $\mathcal{P}_O$.

* * *

Avec $\mathcal{A}_O$, on donne une interprétation « stéréométrique » élégante des coordonnées affines homogènes. Selon la définition 1, les coordonnées affines homogènes du complété projectif du plan affine sont rapportées à un repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ défini dans la « partie affine » du plan (qui est l'ensemble des points propres). S'agissant du complété projectif $\mathcal{A}_O$, cette « partie » s'identifie avec le plan π. On définit donc dans $\mathcal{A}_O$ les coordonnées affines homogènes en fixant dans π un repère $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ (l'accent différencie O' de la lettre O introduite plus haut). On se donne, au lieu de O', son rayon vecteur $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OO'}$ qui n'est évidemment pas combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, si bien que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ forment une base de l'espace. Inversement, dès qu'on fixe une base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ quelconque telle que l'extrémité O' du vecteur $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OO'}$ soit dans le plan π et les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ lui soient parallèles, on définit un repère affine $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ du plan π et, partant, les coordonnées affines homogènes dans le plan $\mathcal{A}_O$.



Chaque point de $\mathcal{A}_O$, i.e. une droite dans l'espace, est bien défini par son vecteur directeur. Si X, Y, Z sont les coordonnées du vecteur directeur (dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) et $Z \neq 0$, la droite coupe le plan π en un point de coordonnées $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ (par rapport au repère $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$). Lorsque $Z = 0$, la droite est parallèle aux droites de π de vecteur directeur repéré par X, Y (par rapport à la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$). Cela signifie par la proposition 1 que *dans le plan affine complété $\mathcal{A}_O$ les coordonnées affines homogènes définies par la base* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (i.e. par le repère affine associé $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) *ne sont rien d'autre que les coordonnées X, Y, Z des vecteurs directeurs des points du plan qu'on considère comme droites dans l'espace.* □

* * *

Ce résultat aidant, on écrit directement les formules de passage d'un système de coordonnées affines homogènes à un autre. En effet, il s'agit tout bonnement des formules qui décrivent le passage des coordonnées des vecteurs par rapport à une base à leurs coordonnées par rapport à un autre. Elles s'écrivent

$$(4)\qquad \begin{aligned} \rho X' &= c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z, \\ \rho Y' &= c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z, \\ \rho Z' &= c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z, \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous avons introduit un facteur de proportionnalité arbitraire ρ pour souligner l'homogénéité des coordonnées.

On n'oubliera cependant pas que les bases considérées ne sont pas quelconques. Elles sont liées d'une certaine façon au plan π (deux premiers vecteurs de base lui sont parallèles et le troisième a son extrémité dans ce plan). Si l'on en tient compte, on vérifie de suite que $c_{31} = c_{32} = 0$ et $c_{33} = 1$.

Ainsi, *il y a entre deux systèmes quelconques de coordonnées affines homogènes $X : Y : Z$ et $X' : Y' : Z'$ dans le complété projectif du plan affine les formules*

$$\rho X' = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z,$$
$$\rho Y' = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z,$$
$$\rho Z' = Z,$$

ρ *étant un facteur de proportionnalité et*

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cette affirmation a certes lieu dans tout plan affine complété. On pourrait la démontrer directement à l'aide de la proposition 1 et des formules de transformation des coordonnées affines non homogènes. Si nous avons choisi une autre méthode, c'est qu'elle s'applique immédiatement à la gerbe $\mathcal{A}_O$ considérée comme modèle de la géométrie projective.

* * *

Définition 5. On appelle *coordonnées projectives* des points du plan projectif $\mathcal{P}_O$ les coordonnées X, Y, Z dans une base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ quelconque des vecteurs directeurs de ces points considérés comme droites dans l'espace.

Il s'agit évidemment des coordonnées homogènes. A la différence des coordonnées affines homogènes, la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ de la définition 5 est absolument quelconque et indépendante de tout plan π.

D'après les résultats ci-dessus, *le passage d'un système de coordonnées projectives à un autre est décrit par les formules* (4).

La définition 5 ne parle en fait que des coordonnées pour le modèle $\mathcal{P}_O$. Dans tous les autres cas, on les définit le plus facilement en tant que coordonnées X', Y', Z' liées à des coordonnées du plan affine complété par les formules (4).

* * *

Le grand arbitraire laissé sur les transformations des coordonnées projectives permet de réduire le nombre des équations canoniques des courbes de degré 2.

Si l'on passe par exemple dans $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ (équation de l'hyperbole) aux coordonnées

$$X' = Y, \quad Y' = Z, \quad Z' = X,$$

on obtient, après avoir multiplié par -1 et supprimé les accents, l'équation $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$, qui est celle de l'ellipse. De même, en coordonnées

$$X' = Y, \quad Y' = X - Z, \quad Z' = X + Z,$$

l'équation de la parabole $Y^2 = 2XZ$ coïncide avec la même équation de l'ellipse. On voit que dans le plan projectif réel (ou complexe) il existe une seule courbe de degré 2 non dégénérée en deux droites. Dans le complété projectif obtenu par adjonction de la droite impropre, cette courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que la droite ne la coupe pas, lui est tangente ou la coupe en deux points.

Le plan réel-complexe ne contient, à part cette courbe « réelle », que la courbe « imaginaire » $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ n'ayant pas de points réels.

On réduit de même le nombre des classes de couples de droites.

Finalement, on a le

Théorème 2 (classification des courbes du second degré dans le plan projectif). *Toute courbe réelle du second degré du plan projectif réel-complexe est nécessairement l'une des courbes suivantes:*

[1] *Courbe réelle non dégénérée* ($X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$).

[2] *Courbe imaginaire non dégénérée* ($X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$).

[3] *Deux droites distinctes réelles* ($X^2 - Y^2 = 0$).

[4] *Deux droites imaginaires (complexes conjuguées)* ($X^2 + Y^2 = 0$).

[5] *Deux droites confondues (réelles)* ($X^2 = 0$).

Dans le plan projectif complexe, les seules courbes du second degré sont

[1] *Une courbe non dégénérée* ($X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$).

[2] *Deux droites distinctes* ($X^2 + Y^2 = 0$).

[3] *Deux droites confondues* ($X^2 = 0$). □

Les courbes sont accompagnées d'équations canoniques.

LEÇON 26

Isomorphismes de coordonnées d'espaces vectoriels. — Isomorphismes de coordonnées d'espaces affines. — Complété projectif de l'espace affine. — Espace projectif. — Faisceaux de plans. — Gerbes de plans. — Adjonction d'éléments impropres. — Transformations orthogonales, affines et projectives.

Notre manière d'introduire les coordonnées projectives au moyen des coordonnées du plan affine complété a été plutôt malhabile et inesthétique. Mais c'était la seule tactique à employer dans le cas général car la notion même de plan projectif a été établie à partir des plans affines complétés. Le fait est qu'il n'est pas facile d'en donner une définition intrinsèque. Nous allons le faire par un procédé qui est visiblement le plus simple et suffisamment riche du point de vue des idées quoique peu élégant.

On définit d'abord d'une façon nouvelle l'espace vectoriel.

On observe que pour tout corps $\mathbb{K}$ et tout $n \geqslant 1$ les formules

$$(1) \qquad \begin{array}{l} y^1 = c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n = c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n, \end{array}$$

où

$$\begin{vmatrix} c_1^1 \ldots c_n^1 \\ \cdots\cdots \\ c_1^n \ldots c_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

définissent des applications bijectives de l'ensemble $\mathbb{K}^n$ sur lui-même. Ces applications sont des isomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ sur lui-même (i.e. des *automorphismes* de $\mathbb{K}^n$). Elles s'appellent les *transformations linéaires homogènes* et constituent évidemment un groupe. Ce groupe noté GL $(n; \mathbb{K})$ porte le nom de *groupe linéaire général*. Il est isomorphe au groupe des matrices non dégénérées d'ordre n.

Pour tout espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, ses isomorphismes de coordonnées (voir leçon 6) sont les bijections

$$(2) \qquad \alpha : \mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$$

ayant les propriétés suivantes (l'écriture $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{V})$ signifie que α est un isomorphisme (2)) :

Propriété 1. *Si* $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{V})$ *et* $\varphi \in$ GL $(n; \mathbb{K})$, *alors* $\varphi \circ \alpha \in$ Coor $(\mathcal{V})$.

Propriété 2. *Si* α, $\alpha' \in$ Coor $(\mathcal{V})$, *alors* $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in$ GL $(n; \mathbb{K})$.

La dernière propriété équivaut à dire qu'il y a entre les coordonnées dans deux bases différentes les relations de la forme (1), et la propriété 1 signifie que si $x^1, \ldots, x^n$ sont des coordonnées, alors $y^1, \ldots, y^n$ sont encore des coordonnées (mais dans une autre base) pour toute transformation (1).

Fait nouveau, ces propriétés caractérisent bien les isomorphismes de coordonnées.

Proposition 1. *Soit un ensemble $\mathcal{V}$. Si l'on se donne l'ensemble* Coor $(\mathcal{V})$ *des bijections $\mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$ possédant les propriétés* 1 *et* 2 (*voire la seule propriété* 2), *alors on confère à $\mathcal{V}$ la structure d'espace vectoriel telle que les applications de* Coor $(\mathcal{V})$ *soient des* (*les si la propriété* 1 *a lieu*) *isomorphismes de coordonnées.*

Démonstration. Soit $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{V})$ quelconque. On transporte par α les opérations linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{V}$, i.e. on pose

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \alpha^{-1}(\alpha(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{y})),$$

$$k\mathbf{x} = \alpha^{-1}(k\alpha(\mathbf{x}))$$

pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ quelconques et tout $k \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{V}$ est structuré en espace vectoriel et α devient un isomorphisme de coordonnées (associé à la base $\alpha^{-1}(\mathbf{e}_1), \ldots, \alpha^{-1}(\mathbf{e}_n)$, où $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Il suffit donc, pour avoir le résultat voulu, d'établir que ces opérations sont indépendantes de α. Or, cela découle de suite de la propriété 2 et du fait qu'une transformation linéaire homogène est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$. En effet, si $\alpha' = \varphi \circ \alpha$, où $\varphi \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$, alors

$$\alpha'^{-1}(\alpha'(\mathbf{x}) + \alpha'(\mathbf{y})) = \alpha^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha(\mathbf{x})) + \varphi(\alpha(\mathbf{y})))) = \\ = \alpha^{-1}(\alpha(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{y}))$$

et

$$\alpha'^{-1}(k\alpha'(\mathbf{x})) = \alpha^{-1}(\varphi^{-1}(k\varphi(\alpha(\mathbf{x})))) = \alpha^{-1}(k\alpha(\mathbf{x}))$$

quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{K}$. L'unicité de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{V}$ est évidente. □

On voit que la proposition 1 fournit une nouvelle axiomatique des espaces vectoriels, dont les notions premières fondamentales sont les applications (1) et les axiomes s'énoncent sous forme de propriétés 1 et 2.

On axiomatise de même la théorie des espaces affines. L'étude commence par le groupe Aff $(n; \mathbb{K})$ des automorphismes de l'ensemble $\mathbb{K}^n$ défini comme espace affine, i.e. par les *transformations linéaires non homogènes* de la forme

$$y^1 = c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n + b^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^n = c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n + b^n,$$

où

$$\begin{vmatrix} c_1^1 \dots c_n^1 \\ \dots\dots \\ c_1^n \dots c_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pour tout espace affine $\mathcal{A}$ sur le corps $\mathbb{K}$, l'ensemble Coor ($\mathcal{V}$) de ses isomorphismes de coordonnées

$$\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^n$$

jouit des propriétés analogues à 1 et 2 (on remplace évidemment Coor ($\mathcal{V}$) par Coor ($\mathcal{A}$) et GL (n; $\mathbb{K}$) par Aff (n; $\mathbb{K}$)). On a de même la

Proposition 2. *Soit un ensemble $\mathcal{A}$. Si l'on se donne l'ensemble* Coor ($\mathcal{A}$) *des bijections $\mathcal{A} \to \mathbb{K}^n$ possédant les propriétés* 1 *et* 2 *(relativement au groupe* Aff (n; $\mathbb{K}$)), *alors on confère à $\mathcal{A}$ la structure d'espace affine sur le corps $\mathbb{K}$ telle que les applications de* Coor ($\mathcal{A}$) *soient des isomorphismes de coordonnées.*

Démonstration. Soit, dans $\mathcal{A}$, un point O. On désigne par Coor^0 ($\mathcal{A}$) une partie de Coor ($\mathcal{A}$) qui comprend toutes les applications $\alpha \in$ Coor ($\mathcal{A}$) transformant O en $(0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$. On constate sans peine qu'en posant $\mathcal{V} = \mathcal{A}$ et Coor ($\mathcal{V}$) = Coor^0 ($\mathcal{A}$) on satisfait à toutes les conditions de la proposition 1. L'ensemble $\mathcal{V}$ est donc un espace vectoriel. On définit l'application $A, B \mapsto \overrightarrow{AB}$ en posant

$$\overrightarrow{AB} = \alpha^{-1}(\alpha(B) - \alpha(A)),$$

avec $\alpha \in$ Coor^0 ($\mathcal{A}$). Il est immédiat de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}$ est indépendant de α, si bien qu'on définit sur $\mathcal{A}$ une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel associé est $\mathcal{V}$. L'unicité est évidente. □

* * *

La méthode s'applique également lorsqu'on fait de la géométrie projective dans les espaces affines (nous donnerons une définition générale sans nous limiter à $n = 2$; lorsque $n = 2$, on obtient le complété projectif du plan affine). On définit au préalable l'analogue affine complété de $\mathbb{K}^n$, ce qui ne présente aucune difficulté.

Soit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0 \subset \mathbb{K}^{n+1}$ de tous les vecteurs $(x^0, x^1, \dots, x^n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. La relation de proportionnalité

$$(x^0, x^1, \dots, x^n) \sim (y^0, y^1, \dots, y^n)$$

est une relation d'équivalence dans $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ s'il existe un nombre $k \neq 0$ tel que

$$y^0 = kx^0, \quad y^1 = kx^1, \dots, y^n = kx^n.$$

La classe d'équivalence contenant le vecteur $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ sera notée

$$(x^0 : x^1 : \ldots : x^n). \tag{3}$$

(Ces classes ne sont autres que les droites de l'espace $\mathbb{K}^{n+1}_{\mathrm{aff}}$ passant par le point $(0, 0, \ldots, 0)$.)

Définition 1. On appelle *espace projectif* $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$ *de dimension n sur le corps* $\mathbb{K}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence (3).

Sur $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$ opère le groupe Pr-Aff $(n; \mathbb{K})$ dont les éléments sont les transformations linéaires homogènes de la forme

$$\begin{aligned} \rho y^0 &= x^0, \\ \rho y^1 &= c^1_0 x^0 + c^1_1 x^1 + \ldots + c^1_n x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho y^n &= c^n_0 x^0 + c x^n_1 x^1 + \ldots + c^n_n x^n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{vmatrix} c^1_1 \ldots c^1_n \\ \cdots\cdots \\ c^n_1 \ldots c^n_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pr-Aff $(n; \mathbb{K})$ étant un groupe abstrait est isomorphe à Aff $(n; \mathbb{K})$.

En particulier, on a pour $n = 2$ le groupe Pr-Aff $(2; \mathbb{K})$ dont les transformations s'écrivent après le changement de notations simple $x^0 = Z$, $x^1 = X$, $x^2 = Y$:

$$\begin{aligned} \rho X' &= c_{11} X + c_{12} Y + c_{13} Z, \\ \rho Y' &= c_{21} X + c_{22} Y + c_{23} Z, \\ \rho Z' &= Z, \end{aligned}$$

équations connues, où

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Définition 2. On appelle le *complété projectif de dimension n sur le corps* $\mathbb{K}$ *de l'espace affine* un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque pour lequel on a défini un ensemble Coor $(\mathcal{A})$ des bijections

$$\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n$$

tel qu'on ait les axiomes suivants.

Axiome 1. Si $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{A})$ et $\varphi \in$ Pr-Aff $(n; \mathbb{K})$, alors $\varphi \circ \alpha \in$ Coor $(\mathcal{A})$.

Axiome 2. Si $\alpha, \alpha' \in$ Coor $(\mathcal{A})$, alors $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in$ Pr-Aff $(n; \mathbb{K})$.

Les points A de $\mathcal{A}$ pour lesquels $\alpha(A)$ s'écrit $(0 : x^1 : \ldots : x^n)$ dans au moins une application $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{A})$ (et, partant, dans toutes

ces applications) sont par définition les *points impropres* de l'espace affine complété $\mathcal{A}$, les autres points étant dits *propres*.

A la lumière des résultats ci-dessus, on peut dire que les espaces $\mathcal{A}$ de dimension 2 au sens de la définition 2 coïncident avec les complétés projectifs des plans affines au sens de la définition 3 de la leçon 24. Pour n quelconque, ils coïncident avec les espaces affines complétés obtenus par généralisation évidente de la dernière définition.

* * *

Le problème de définir les espaces projectifs ne présente désormais aucun point obscur.

Soit Proj $(n;\ \mathbb{K})$ le groupe de toutes les transformations de $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$ qui opèrent selon les formules

$$(4)\qquad \begin{aligned} \rho y^0 &= c_0^0 x^0 + c_1^0 x^1 + \ldots + c_n^0 x^n, \\ \rho y^1 &= c_0^1 x^0 + c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho y^n &= c_0^n x^0 + c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{vmatrix} c_0^0 & c_1^0 & \ldots & c_n^0 \\ c_0^1 & c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0^n & c_1^n & \ldots & c_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ce groupe étant abstrait est isomorphe au groupe quotient du groupe des matrices non dégénérées d'ordre $n+1$ par le sous-groupe distingué des matrices scalaires.

Définition 3. On appelle *espace projectif de dimension n sur le corps* $\mathbb{K}$ un ensemble $\mathcal{P}$ quelconque pour lequel on a défini un ensemble Coor $(\mathcal{P})$ des bijections

$$\alpha : \mathcal{P} \to \mathbb{K}\mathrm{P}^r$$

tel qu'on ait les axiomes suivants.

Axiome 1. Si $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{P})$ et $\varphi \in$ Proj $(n;\ \mathbb{K})$, alors $\varphi \circ \alpha \in$ Coor $(\mathcal{P})$.

Axiome 2. Si $\alpha,\ \alpha' \in$ Coor $(\mathcal{P})$, alors $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in$ Proj $(n;\ \mathbb{K})$.

Les applications $\alpha \in$ Coor $(\mathcal{P})$ sont par définition les *isomorphismes de coordonnées*, et les nombres $x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n$ vérifiant la relation

$$\alpha\,(\mathcal{P}) = (x^0 : x^1 : \ldots : x^n)$$

s'appellent pour tout point $A \in \mathcal{P}$ les *coordonnées projectives* de A associées à l'isomorphisme α.

Il est clair que dans le cas $n = 2$, on a les plans projectifs au sens de la définition 4 de la leçon 25 et les coordonnées projectives définies dans la même leçon.

* * *

Après cette incursion dans le domaine de constructions axiomatiques générales, on revient aux développements géométriques plus significatifs.

A l'instar de la droite dans le plan, le plan dans l'espace constitue l'ensemble de base d'une géométrie.

Chaque plan de l'espace affine est bien défini en coordonnées affines x, y, z par les coefficients de son équation

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

on prend donc ces coefficients pour ses coordonnées homogènes. Le plan sera noté $(A : B : C : D)$.

Soient deux plans distincts

$$(5) \quad A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0 \text{ et } A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Définition 4. On appelle *faisceau de plans* défini par (5) l'ensemble de tous les plans $(A : B : C : D)$ pour lesquels on indique des nombres μ et ν (qui ne sont certes pas simultanément nuls) tels que

$$(6) \quad \begin{aligned} A &= \mu A_0 + \nu A_1, & B &= \mu B_0 + \nu B_1, \\ C &= \mu C_0 + \nu C_1, & D &= \mu D_0 + \nu D_1 \end{aligned}$$

(le plan $(A : B : C : D)$ dépend évidemment du rapport $\mu : \nu$ seul).

On constate une analogie parfaite avec la définition 1 de la leçon 24.

On pourrait donc revoir cette leçon et suivre les sentiers battus, mais telle n'est pas notre intention. Désireux d'échapper à l'algèbre linéaire fastidieuse, nous allons nous engager dans une autre voie. Pour ce faire nous aurons besoin du

Lemme 1. *Etant donné, dans l'espace, un point quelconque* M_1 (x_1, y_1, z_1) *non dans les deux plans* (5) *à la fois, le faisceau* (6) *comprend un plan contenant* M_1 *et un seul.*

Démonstration. Si le plan cherché existe, on a pour μ et ν correspondants

$$(\mu A_0 + \nu A_1)\, x_1 + (\mu B_0 + \nu B_1)\, y_1 + (\mu C_0 + \nu C_1)\, z_1 + \\ + (\mu D_0 + \nu D_1) = 0,$$

i.e.

$$\mu\,(A_0x_1 + B_0y_1 + C_0z_1 + D_0) + \nu\,(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) = 0,$$

égalité qui définit de façon unique le rapport

$$(7) \quad \mu : \nu = -(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) : (A_0x_1 + B_0y_1 + C_0z_1 + D_0),$$

ce qui démontre l'unicité.

On prouve l'existence en prenant μ et ν définis par (7). □

Définition 5. Le faisceau (6) est dit *propre* si les plans (5) sont sécants et *impropre* dans le cas contraire (s'il y a parallélisme de (5)).

Proposition 3. *Un faisceau propre est formé de tous les plans contenant la droite intersection des plans* (5) *et un faisceau impropre comprend tous les plans parallèles aux plans* (5).

Démonstration. Supposons les plans (5) sécants. Le système (5) définit alors la droite suivant laquelle ils se coupent. Si le point M_0 (x_0, y_0, z_0) appartient à la droite (5), on a pour tout μ et tout ν

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= (\mu A_0 + \nu A_1)\, x_0 + (\mu B_0 + \nu B_1)\, y_0 + \\ &+ (\mu C_0 + \nu C_1)\, z_0 + (\mu D_0 + \nu D_1) = \\ &= \mu\,(A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0 + D_0) + \\ &+ \nu\,(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) = 0, \end{aligned}$$

si bien que le plan (6) passe par M_0 (x_0, y_0, z_0). Ainsi, le plan (6) contient la droite (5). Inversement, soit un plan quelconque contenant la droite (5). On fixe dans ce plan un point arbitraire M_1 (x_1, y_1, z_1) extérieur à (5). Selon le lemme 1, il existe dans le faisceau (6) un seul plan $(A : B : C : D)$ passant par M_1. Le plan initial et le plan construit ont en commun la droite (5) et le point M_1, i.e. ils se confondent. Par conséquent, le plan considéré appartient au faisceau (6).

Supposons les plans (5) parallèles, auquel cas

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0},$$

et on a pour tout μ et tout ν (tels qu'au moins l'un des nombres $\mu A_0 + \nu A_1$, $\mu B_0 + \nu B_1$, $\mu C_0 + \nu C_1$ soit non nul)

$$\frac{\mu A_0 + \nu A_1}{A_0} = \frac{\mu B_0 + \nu B_1}{B_0} = \frac{\mu C_0 + \nu C_1}{C_0}.$$

Autrement dit, tout plan de (6) est parallèle aux plans (5). Inversement, soit un plan quelconque parallèle à (5) et son point arbitraire M_1 (x_1, y_1, z_1). Aux termes du lemme 1, le faisceau renferme un seul plan passant par M_1. Ce plan étant parallèle aux plans (5) se confond avec le plan initial qui appartient donc au faisceau (6). □

Si l'on complète l'espace en adjoignant à chaque plan une droite impropre (ce qui nous plonge dans le complété projectif) et si l'on assujettit les droites impropres des plans à se confondre s'il y a parallélisme des plans, et dans ce cas seulement, alors chaque faisceau impropre devient un faisceau de plans passant par une droite fixe.

* * *

Les faisceaux sont des analogues des droites. Voyons ce qu'il en est des plans. Soient

$$(8)\qquad \begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0,\\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0,\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

trois plans non dans un même faisceau (i.e. ils ne sont pas parallèles ni sécants suivant une même droite).

Définition 6. On appelle *gerbe de plans* définie par (8) l'ensemble de tous les plans $(A : B : C : D)$ pour lesquels on indique des nombres μ_0, μ_1, μ_2 (qui ne sont certes pas simultanément nuls) tels que

$$(9)\qquad \begin{aligned} A &= \mu_0A_0 + \mu_1B_1 + \mu_2A_2,\\ B &= \mu_0B_0 + \mu_1B_1 + \mu_2B_2,\\ C &= \mu_0C_0 + \mu_1C_1 + \mu_2C_2,\\ D &= \mu_0D_0 + \mu_1D_1 + \mu_2D_2. \end{aligned}$$

Une gerbe est dite *propre* si les plans (8) se coupent en un seul point (*centre de la gerbe*), et elle est *impropre* si les plans (8) n'ont aucun élément commun (i.e. si deux de ces plans se coupent suivant une droite parallèle au troisième; la droite intersection s'appelle la *droite centrale* de la gerbe impropre).

En désignant les premiers membres des équations (8) par f_0, f_1 et f_2 respectivement, l'équation de tout plan de la gerbe s'écrit

$$(10)\qquad \mu_0f_0 + \mu_1f_1 + \mu_2f_2 = 0.$$

Ces notations abrégées s'avèrent des fois utiles.

Proposition 4. *Une gerbe propre est formée de tous les plans passant par son centre, et une gerbe impropre comprend tous les plans parallèles à la droite centrale.*

Démonstration. Soient (9) une gerbe propre et M_0 (x_0, y_0, z_0) son centre. Quels que soient μ_0, μ_1, μ_2, le premier membre de (10) a pour valeur en M_0

$$\mu_0f_0(x_0, y_0, z_0) + \mu_1f_1(x_0, y_0, z_0) + \mu_2f_2(x_0, y_0, z_0),$$

i.e. il est nul. Par conséquent, tout plan (10) de la gerbe passe par M_0. Inversement, soit un plan arbitraire passant par le centre M_0 de la gerbe (9) et soit, dans ce plan, deux points distincts M_1 (x_1, y_1, z_1) et M_2 (x_2, y_2, z_2) non en ligne droite avec le point M_0. Le plan (10) de la gerbe passe par ces points sous la condition

$$\mu_0f_0(x_1, y_1, z_1) + \mu_1f_1(x_1, y_1, z_1) + \mu_2f_2(x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\mu_0f_0(x_2, y_2, z_2) + \mu_1f_1(x_2, y_2, z_2) + \mu_2f_2(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

Ces équations admettent une solution non triviale (unique à un facteur de proportionnalité près) en μ_0, μ_1, μ_2:

$$\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 = \begin{vmatrix} f_1(x_1, y_1, z_1) & f_2(x_1, y_1, z_1) \\ f_1(x_2, y_2, z_2) & f_2(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} f_2(x_1, y_1, z_1) & f_0(x_1, y_1, z_1) \\ f_2(x_2, y_2, z_2) & f_0(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_0(x_1, y_1, z_1) & f_1(x_1, y_1, z_1) \\ f_0(x_2, y_2, z_2) & f_1(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix}.$$

Le plan associé passant par trois points M_0, M_1, M_2 non colinéaires se confond avec le plan donné qui appartient donc à la gerbe.

Supposons que la gerbe (9) est impropre. Soit a (l, m, n) un vecteur directeur de sa droite centrale. Comme a est parallèle aux plans (8), on a

$$A_0 l + B_0 m + C_0 n = 0,$$
$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0,$$
$$A_2 l + B_2 m + C_1 n = 0.$$

On a donc pour tous les μ_0, μ_1, μ_2

$$(\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2)\, l + (\mu_0 B_0 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2)\, m +$$
$$+ (\mu_0 C_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2)\, n = 0,$$

ce qui veut dire que tout plan (8) est parallèle à la droite centrale de la gerbe (9). Inversement, soit $(A : B : C : D)$ un plan tel que

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Dans ce cas, la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

a ses colonnes linéairement dépendantes (à coefficients l, m, n, 0), et il y a donc dépendance de ses lignes. Par hypothèse, trois dernières lignes sont linéairement indépendantes (sinon les plans (8) appartiennent à un même faisceau). Par conséquent, la première ligne s'exprime linéairement au moyen des autres, ce qui signifie justement l'appartenance de $(A : B : C : D)$ à la gerbe (9). □

* * *

Pour que les gerbes impropres possèdent un centre, on munit chaque droite d'un point impropre, chaque plan d'une droite impropre, et on estime que le point impropre de la droite est sur la droite

impropre du plan si et seulement s'il y a parallélisme de la droite et du plan.

Il est clair qu'il suffit d'adjoindre à chaque droite un point impropre, le même pour toutes les droites parallèles, et de dire que l'ensemble des points impropres des droites parallèles à un plan en constitue la droite impropre. Ceci étant, il y a coïncidence désirée (voir plus haut) des droites impropres des plans parallèles. Il est naturel que l'ensemble des points impropres complétant l'espace s'interprète comme étant un plan.

La description formelle du *complété projectif* ainsi obtenu obéit aux règles connues (voir définition 3 de la leçon 24 ou définition 2 de la leçon présente). Si l'on fait abstraction, dans cet espace, de la différence entre les points propres et les points impropres, on obtient l'espace projectif (voir définition 4 de la leçon 25 ou définition 3 ci-dessus).

Le temps nous manque malheureusement pour entrer dans le détail de la question.

* * *

On connaît dès l'école secondaire le grand rôle qui revient en géométrie aux notions intimement liées de figures congruentes et de déplacements.

On se représente intuitivement un déplacement (d'un plan par exemple) comme une transformation qui « ne change aucun élément essentiel » : les longueurs et les angles se conservent, la somme de vecteurs devient une somme de vecteurs, le produit d'un vecteur par un nombre se transforme en un produit d'un vecteur par un nombre, et ainsi de suite. Généralement parlant, un déplacement est donc un isomorphisme du plan euclidien sur lui-même, i.e. un automorphisme. Plus précisément, un déplacement est un automorphisme du plan orienté puisqu'il conserve l'orientation. Mais il est connu (voir leçon 14) que l'isomorphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ d'un espace euclidien sur un autre (ou sur lui-même) est défini par égalité des coordonnées dans deux repères rectangulaires, i.e. on définit l'isomorphisme en choisissant dans $\mathcal{A}$ un repère rectangulaire $O\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_n$, dans $\mathcal{A}'$ un repère rectangulaire $O'\mathbf{i}'_1 \ldots \mathbf{i}'_n$ et en faisant correspondre à un point $A \in \mathcal{A}$ quelconque le point $A' \in \mathcal{A}'$ de mêmes coordonnées dans $O'\mathbf{i}'_1 \ldots \mathbf{i}'_n$ que A l'a été dans $O\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_n$. S'agissant du cas étudié $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et du déplacement qui conserve l'orientation, on est conduit à la définition formelle 7 pour n quelconque (bien qu'on n'en ait besoin que pour $n = 2$ et $n = 3$).

Définition 7. On appelle *déplacement* de l'espace euclidien $\mathcal{A}$ de dimension n une transformation de $\mathcal{A}$ définie par égalité des coordonnées dans deux repères rectangulaires de même sens. Cela signifie que tout déplacement est bien défini par deux tels repères $O\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_n$ et $O'\mathbf{i}'_1 \ldots \mathbf{i}'_n$ (le premier pouvant être quelconque) et

change tout point A en A' qui a dans $O'\mathbf{i}'_1 \ldots \mathbf{i}'_n$ les mêmes coordonnées que A a possédé dans $O\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_n$.

On voit donc que si

$$\overrightarrow{OA} = a_1\mathbf{i}_1 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n,$$

alors

$$\overrightarrow{O'A'} = a_1\mathbf{i}'_1 + \ldots + a_n\mathbf{i}'_n.$$

Tous les déplacements de $\mathcal{A}$ constituent évidemment un groupe. Ce groupe dépend à un isomorphisme près de la seule dimension n. Nous le noterons $\mathrm{Ort}^+(n)$.

Si l'on supprime, dans la définition 7, la condition « les repères sont de même sens », on a des transformations plus générales qui sont dites *orthogonales* et forment le groupe $\mathrm{Ort}(n)$ dont $\mathrm{Ort}^+(n)$ est un sous-groupe.

On introduit de même les automorphismes d'espaces affines. Ce sont les *transformations affines* définies par égalité des coordonnées dans deux repères affines.

On introduit enfin les *transformations projectives* qui opèrent par égalité des coordonnées dans deux systèmes de coordonnées projectives.

En géométrie euclidienne, on considère comme égales deux figures congruentes (i.e. deux figures qui dérivent l'une de l'autre par un déplacement ou, de façon plus générale, par une transformation orthogonale). Cette définition de l'égalité de figures caractérise la géométrie euclidienne.

De même, deux figures sont égales en géométrie affine si elles sont *affinement congruentes*, i.e. si elles sont déduites l'une de l'autre par une transformation affine. On retrouve en géométrie projective la notion analogue de figures *projectivement congruentes*.

Ces propriétés des transformations orthogonales, affines et projectives situent ces transformations dans la géométrie.

Le cadre de ce livre est trop restreint pour qu'on puisse étudier les transformations projectives. Quant aux transformations orthogonales et affines, on s'en occupera dès la leçon suivante.

LEÇON 27

Transformations affines en coordonnées.— Exemples de transformations affines.— Décomposition des transformations affines.— Transformations orthogonales.— Déplacements du plan.— Symétries et symétries avec glissement.— Décomposition d'un déplacement du plan en le produit de deux symétries.— Rotations de l'espace.

Soient $x^1, \ldots, x^n$ des coordonnées affines fixes dans l'espace affine $\mathcal{A}$. Toute transformation affine Φ de $\mathcal{A}$ étant définie par égalité des coordonnées détermine des coordonnées affines $x^{1'}, \ldots$ $\ldots, x^{n'}$ distinctes des premières, et, inversement, la donnée des coordonnées affines $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ quelconques définit une transformation affine Φ.

Etant donné un point $A \in \mathcal{A}$ quelconque, les coordonnées accentuées du point $A' = \Phi(A)$ coïncident par définition avec les coordonnées non accentuées de A :

$$x^{1'} = x^1, \ldots, x^{n'} = x^n.$$

Or, la règle de transformation des coordonnées affines dit que les coordonnées non accentuées (notées $y^1, \ldots, y^n$) de A' s'expriment par les coordonnées $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ de ce point au moyen des formules

$$\begin{aligned} y^1 &= c_1^1 x^{1'} + \ldots + c_n^1 x^{n'} + b^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= c_1^n x^{1'} + \ldots + c_n^n x^{n'} + b^n, \end{aligned}$$

le déterminant de la matrice (c_i^j) étant non nul. La substitution $x^{1'}, \ldots, x^{n'} = x^1, \ldots, x^n$ donne

$$(1) \qquad \begin{aligned} y^1 &= c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n + b^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n + b^n, \end{aligned}$$

ou, en notations matricielles,

$$(2) \qquad y = Cx + b,$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 \dots c_n^1 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ c_1^n \dots c_n^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a le

Théorème 1. *Toute transformation affine* Φ *rapportée à des coordonnées affines fixées dans l'espace* $\mathcal{A}$ *est bien définie par une matrice non dégénérée* C *et la matrice colonne* b. *Cette transformation fait correspondre à un point* A *de coordonnées* $x^1, \dots, x^n$ *le point* A' *de coordonnées* $y^1, \dots, y^n$ *des formules* (1) *ou* (2). □

On donne d'habitude à C le nom de *matrice de transformation* Φ (dans le système donné de coordonnées).

Chose à noter, les égalités (1) sont *identiques* aux formules de transformation des coordonnées affines. Si $x^1, \dots, x^n$ et $y^1, \dots, y^n$ sont les coordonnées de deux points *distincts* dans *un même* système de coordonnées, les formules (1) définissent une transformation affine, tandis qu'elles définissent une transformation des coordonnées si $x^1, \dots, x^n$ et $y^1, \dots, y^n$ repèrent *un même* point dans *deux* systèmes *distincts* de coordonnées.

On le dirait d'ailleurs de toute transformation (projective, orthogonale, etc.) définie par égalité des coordonnées d'autres types.

Remarque 1. Toute transformation affine change les droites en droites. On montre (on s'en abstiendra) que la réciproque a lieu pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n > 1$: *chaque application bijective de l'espace affine qui conserve la rectitude des points, est une transformation affine.* La restriction $n > 1$ tient bien sûr à ce que la condition de rectitude n'a pas de sens pour $n = 1$. Quant à l'autre restriction ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), elle s'avère essentielle. Dans le cas complexe, par exemple, la transformation envoyant chaque point en un point de coordonnées complexes conjuguées n'est pas une transformation affine (elle n'est pas régie par (1)) bien qu'elle conserve la rectitude des points. Le fait est qu'il existe un automorphisme non identique (la conjugaison complexe) du corps $\mathbb{C}$ et qu'il n'y en a pas pour $\mathbb{R}$.

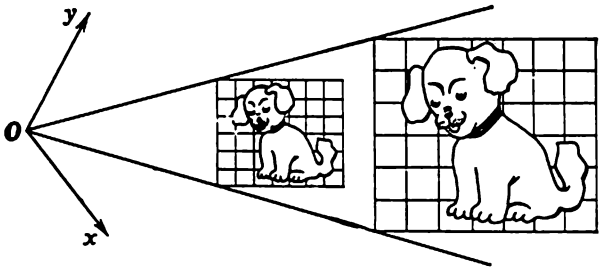
* * *

Exemples de transformations affines.

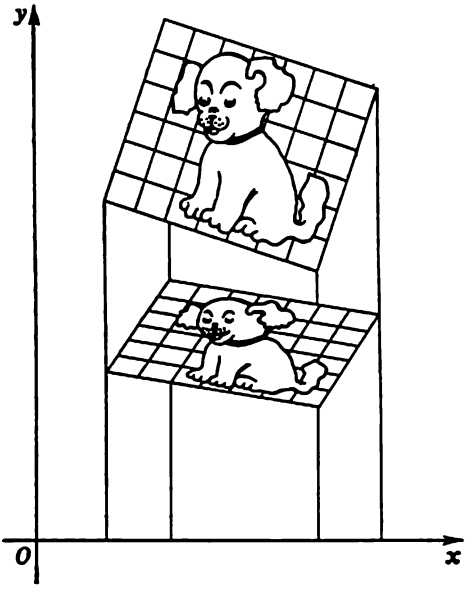
Dans tous les exemples on suppose, pour fixer les idées, que l'espace $\mathcal{A}$ est euclidien et que les coordonnées sont rectangulaires, auquel cas toute transformation orthogonale est nécessairement une transformation affine. Nous donnerons (pour le plan seul) plusieurs exemples moins banaux.

1) Toute homothétie est une transformation affine. Sa matrice est (dans tout repère affine dont l'origine est le centre de l'homothétie) une matrice diagonale d'éléments diagonaux identiques, i.e.

sa forme est kE, E étant une matrice unité. (On sait que ces matrices sont dites *scalaires*.)



Homothétie



Contraction

2) La transformation affine du plan définie (en coordonnées x, y) par les formules

$$x_1 = x, \quad y_1 = ky,$$

$k > 0$, est une *contraction* d'ordonnées. La composée d'une contraction d'ordonnées et d'une contraction d'abscisses se définit par

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ly,$$

avec $k > 0$, $l > 0$. Elle a pour matrice une matrice diagonale d'éléments diagonaux k, l positifs.

Il est clair que les contractions (et les déplacements) transforment toute ellipse en une ellipse (en une circonférence par exemple). Ainsi, *toutes les ellipses sont affinement congruentes. Il en est de même des hyperboles et des paraboles* (celles-ci sont même homothétiques pour une position convenable). Analytiquement, les ellipses, les hyperboles et les paraboles ont une seule équation affine canonique (voir leçon 22).

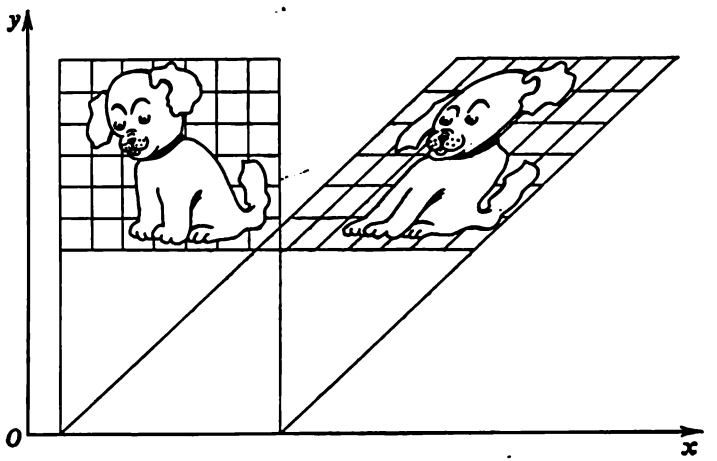
3) La transformation affine définie par

$$x_1 = x + py, \quad y_1 = y,$$

p étant quelconque, s'appelle le *glissement*. Elle conserve les aires des figures planes.

* * *

Chose remarquable, dans le plan euclidien tout glissement se décompose en un produit d'une transformation orthogonale (d'un



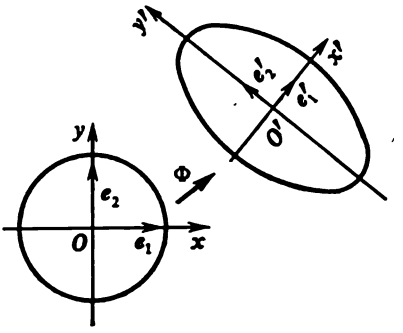
Glissement

déplacement) et de deux contractions par rapport aux axes perpendiculaires entre eux. Il y a plus. On a la

Proposition 1. *Dans le plan euclidien, toute transformation affine Φ est le produit d'une transformation orthogonale et de deux contractions par rapport aux axes perpendiculaires entre eux.*

Démonstration. Soit, dans le plan, une circonférence quelconque de rayon 1. La transformation affine Φ la change en une ellipse, et son centre O devient le centre O' de l'ellipse (pourquoi ?). Soient

$O'E'_1$ et $O'E'_2$ deux droites passant par O' dans les directions principales (les axes) de l'ellipse et soient $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}'_2$ leurs vecteurs directeurs unitaires qui forment donc une base orthonormée. On suppose que E'_1, E'_2 sont les points d'intersection de l'ellipse et des droites $O'E'_1$, $O'E'_2$. Soient E_1 et E_2 leurs images réciproques par Φ. Dans ce cas, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ sont des vecteurs unitaires et OE_1, OE_2 les diamètres de la circonférence. Une transformation affine change, on le voit sans peine, les diamètres conjugués en diamètres conjugués. Les diamètres $O'E'_1$, $O'E'_2$ étant les axes sont conjugués, si bien qu'il



en est de même de OE_1, OE_2. Puisque les diamètres conjugués d'une circonférence sont perpendiculaires, on a la propriété d'orthonormalité de la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

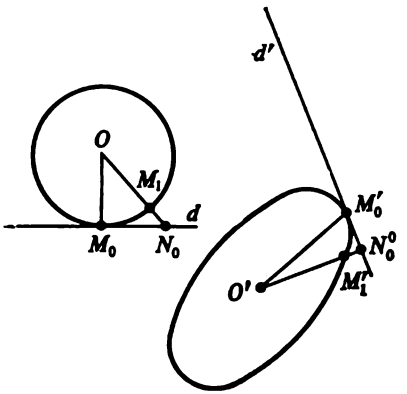
Ainsi, on a construit deux repères rectangulaires $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ et $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ tels que la transformation affine change les axes de coordonnées du premier repère en ceux du second.

La démonstration sera terminée si l'on observe que la transformation orthogonale définie par égalité de ces coordonnées ne diffère visiblement de Φ que par deux contractions par rapport aux droites $O'E'_2$, $O'E'_1$ (de rapports respectifs k et l égaux aux longueurs des vecteurs $\overrightarrow{O'E'_1}$ et $\overrightarrow{O'E'_2}$ pris dans cet ordre). □

La clef de voûte de la démonstration est l'existence, dans le plan, de deux directions mutuellement perpendiculaires que Φ transforme en des directions mutuellement perpendiculaires. On l'établit facilement (en négligeant la théorie des courbes de degré 2) si l'on applique (aux fonctions sur la circonférence) le résultat connu en analyse sous le nom de *théorème de Weierstrass* : une fonction continue atteint son minimum sur un ensemble compact.

Soit la même circonférence de rayon 1 et de centre O. Etant donné son point quelconque M, on désigne par $f(M)$ la distance de son transformé $M' = \Phi(M)$ au point O' et on a sur la circonférence la fonction $f : M \mapsto f(M)$ qui est évidemment continue. Soit

M_0 son point de minimum. Il se trouve que dans Φ la droite OM_0 et la droite d qui lui est perpendiculaire en M_0 (i.e. la tangente en M_0 à la circonférence) deviennent les droites $O'M'_0$ et d' perpendiculaires entre elles. En effet, on raisonne par l'absurde et on suppose que M'_0 n'est pas confondu avec le pied N'_0 de la perpendiculaire abaissée de O' sur d' (donc, $|O'N'_0| < |O'M'_0| = f(M_0)$). Alors le point M_1 intersection de la circonférence et de la droite ON_0, $N_0 = \Phi^{-1}(N'_0)$, vérifie (vu que M_1 est sur le segment $\overline{ON_0}$, et, partant, le point $M'_1 = f(M_1)$ appartient à $\overline{O'N'_0}$) l'inégalité



$$f(M_1) = |O'M'_1| < |O'N'_0| < f(M_0),$$

contradiction avec l'hypothèse faite sur M_0. □

Ce raisonnement se transpose aisément au cas de dimension quelconque (ce qui correspond à n directions perpendiculaires entre elles). Aussi la proposition 1 est juste (à des modifications adéquates près) pour les transformations affines de l'espace euclidien de dimension arbitraire.

Ladite proposition ramène en fait la théorie des transformations affines quelconques à celle des transformations orthogonales. Voyons ce que sont les transformations orthogonales (en particulier les déplacements). Les coordonnées sont supposées rectangulaires.

* * *

Les transformations orthogonales étant un cas particulier des transformations affines s'écrivent sous forme (2):

$$y = Cx + b \tag{3}$$

à la différence que C n'est pas non dégénérée quelconque, mais une matrice orthogonale arbitraire (en coordonnées rectangulaires; voir leçon 14).

La transformation (3) est un déplacement si et seulement si la matrice C est de déterminant 1, i.e. si elle est unimodulaire. Aussi on dit des fois des déplacements que ce sont les *transformations orthogonales unimodulaires.*

Définition 1. Si $C = E$, la transformation (3) est de la forme $y = x + b$. C'est un déplacement qui s'appelle la *translation.* Toute translation est caractérisée par les propriétés de transformer toute droite en une droite parallèle et de ne pas conserver aucun point (pour $b \neq 0$).

On dit des déplacements qui laissent invariant un point O que ce sont les *rotations de centre O*. Ils forment un groupe noté $\mathrm{Rot}_O(n)$.

Si O est l'origine des coordonnées, la matrice colonne b dans la formule (3) des rotations de centre O est nulle. Ainsi, $\mathrm{Rot}_O(n)$ considéré comme groupe abstrait est isomorphe au groupe $\mathrm{SO}(n)$ des matrices orthogonales unimodulaires.

Conformément à la formule (3), tout déplacement est une rotation $y = Cx$ de centre en l'origine suivie d'une translation $y = x + b$.

* * *

Il se trouve que les rotations (de centre quelconque) et les translations sont les seuls déplacements *du plan* (i.e. pour $n = 2$).

Proposition 2. *Tout déplacement du plan est, ou bien une translation, ou bien une rotation.*

Démonstration. Les résultats obtenus dans la leçon 14 en ce qui concerne la forme des matrices orthogonales unimodulaires d'ordre 2 entraînent que tout déplacement du plan est défini en coordonnées rectangulaires x, y quelconques par les formules

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + b_1, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour $\alpha = 0$ on a une translation. On montre que le déplacement (4) a nécessairement dans le cas contraire un point fixe, i.e. c'est une rotation.

La condition « $M_0(x_0, y_0)$ est laissé invariant par (4) » consiste à vérifier les égalités

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha + b_1, \\ y_0 &= x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha + b_2, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} (1-\cos\alpha)\,x_0 + (\sin\alpha)\,y_0 &= b_1, \\ (-\sin\alpha)\,x_0 + (1-\cos\alpha)\,y_0 &= b_2. \end{aligned}$$

Comme c'est un système linéaire non homogène en x_0, y_0 de déterminant

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha) \neq 0$$

pour $\alpha \neq 0$, il existe un point fixe M_0 (et un seul). □

Toute rotation autour de l'origine dans le plan s'écrit

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}$$

avec α un angle bien défini pour $-\pi < \alpha \leqslant \pi$ qui est par définition l'*angle de rotation.*

* * *

La proposition 2 montre en particulier que tout déplacement dans le plan possède un point fixe au plus. Il n'en est rien pour les transformations orthogonales qui changent l'orientation.

Définition 2. Une transformation orthogonale non identique du plan qui a une droite de points fixes s'appelle la *symétrie par rapport à cette droite*. La droite invariante est par définition l'*axe de symétrie*.

Soit la transformation orthogonale

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + b_1, \quad y' = c_{21}x + c_{22}y + b_2$$

qui est une symétrie d'axe $x = 0$. On a identiquement en y:

$$0 = c_{12}y + b_1, \quad y = c_{22}y + b_2,$$

d'où $c_{12} = 0$, $c_{22} = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$. La matrice C étant orthogonale, cela ne peut avoir lieu (pour une transformation non identique) que si $c_{21} = 0$, $c_{11} = -1$. Ainsi, la symétrie est décrite par les formules

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= y. \end{aligned} \tag{5}$$

En particulier, la symétrie est bien définie par son axe, toute symétrie inversant l'orientation et le carré d'une symétrie étant une coïncidence.

La composée $S \circ \Phi$ de toute transformation orthogonale changeant l'orientation Φ et d'une symétrie quelconque S conserve l'orientation, i.e. c'est un déplacement. Etant donné $\Phi = S \circ \circ (S \circ \Phi)$, cela démontre que *toute transformation orthogonale changeant l'orientation Φ est un déplacement suivi d'une symétrie S* (qui peut être la même pour chaque Φ).

Un exemple en est la *symétrie avec glissement*

$$x' = -x, \quad y = y + a,$$

qui se décompose en le produit d'une symétrie et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de symétrie.

Proposition 3. *Dans le plan, toute transformation orthogonale changeant l'orientation est une symétrie avec glissement.*

Démonstration. Les résultats ci-dessus (et ceux de la leçon 14) entraînent de suite que toute transformation orthogonale inversant l'orientation dans le plan est définie dans un système quelconque de coordonnées rectangulaires x, y par les formules

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + b_1, \\ y' &= x \sin \alpha - y \cos \alpha + b_2. \end{aligned} \tag{6}$$

On établit l'existence des nombres l, m tels que si Ψ est une translation de vecteur a (l, m), alors $\Omega = \Psi^{-1} \circ \Phi$ soit une sy-

métrie dont l'axe est parallèle à **a**. Cela démontre évidemment la proposition du moment que $\Phi = \Psi \circ \Omega$ est la symétrie voulue.

Quels que soient l, m, la transformation $\Omega = \Psi^{-1} \circ \Phi$ est définie par

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + b_1 - l,$$
$$y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha + b_2 - m,$$

si bien que ses points fixes sont donnés moyennant les équations

$$\begin{aligned} x(1 - \cos \alpha) - y \sin \alpha &= b_1 - l, \\ -x \sin \alpha + y(1 + \cos \alpha) &= b_2 - m. \end{aligned} \tag{7}$$

On demande l et m tels que, *primo*, les équations (7) définissent une droite (auquel cas Ω changeant l'orientation est une transformation orthogonale non identique qui a une droite fixe, i.e. c'est une symétrie). Autrement dit, on choisit l et m de façon qu'il y ait proportionnalité des équations (7):

$$\frac{1-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{b_1-l}{b_2-m}.$$

On vérifie identiquement la condition

$$\frac{1-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

et la condition

$$\frac{-\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{b_1-l}{b_2-m}$$

donne pour l et m

$$(b_2 - m)\lambda + (b_1 - l) = 0$$

avec la notation

$$\lambda = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Secundo, on assujettit la droite obtenue à être parallèle au vecteur **a** (l, m), i.e.

$$\frac{l}{m} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi, on a pour l, m:

$$l + m\lambda = b_2\lambda + b_1, \quad \lambda l - m = 0. \tag{8}$$

La proposition se trouve démontrée si l'on observe que ces équations admettent une solution unique

$$l = \frac{b_2\lambda + b_1}{1+\lambda^2}, \quad m = \lambda\frac{b_2\lambda + b_1}{1+\lambda^2}. \qquad \square$$

Il est clair qu'avec $a \neq 0$ aucun point n'est invariant par la symétrie avec glissement. Ainsi, une transformation orthogonale changeant l'orientation qui a au moins un point fixe est une symétrie (et laisse invariante une droite). Le produit de toute rotation et d'une symétrie dont l'axe passe par le centre de rotation étant du nombre est une symétrie. Comme le carré de toute symétrie est l'identité, on dit que *toute rotation du plan est la composée de deux symétries.*

De même, une translation suivie d'une symétrie d'axe perpendiculaire au vecteur translation est une transformation orthogonale inversant l'orientation à droite fixe, i.e. une symétrie. Si l'on translate par exemple le long de l'axe des abscisses, i.e. si

$$x' = x + a, \quad y' = y,$$

alors la composée

$$x' = -x + a, \quad y' = y$$

de la translation et d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées laisse invariante la droite $x = \frac{a}{2}$. Ainsi, toute translation est le produit de deux symétries.

Bref, *tout déplacement du plan se décompose en le produit de deux symétries.* □

* * *

Le temps nous manque pour étudier les transformations orthogonales de l'espace. Disons quelques mots des rotations.

Par définition chaque rotation Φ de l'espace laisse invariant un point O. On considère O comme origine, ce qui fournit les formules pour Φ:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z. \end{aligned}$$

Cherchons tous les points $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ qui restent dans Φ en ligne droite avec $(0, 0, 0)$, i.e. des points tels que

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \tag{9}$$

λ étant un nombre. Les coordonnées x, y, z doivent satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda)\, x + c_{12}y + c_{13}z &= 0, \\ c_{21}x + (c_{22} - \lambda)\, y + c_{23}z &= 0, \\ c_{31}x + c_{32}y + (c_{33} - \lambda)\, z &= 0, \end{aligned}$$

qui admettent, on l'enseigne en algèbre, une solution non triviale si et seulement si

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22}-\lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière égalité est une équation du troisième degré en λ et possède nécessairement une racine réelle en tant qu'une équation de degré impair à coefficients réels. Cela prouve l'existence des points $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ayant la propriété (9) (λ étant racine de (10)). La transformation Φ étant une rotation conserve les longueurs, si bien que $\lambda = \pm 1$.

Ainsi, la rotation Φ laisse invariants tous les points d'une droite passant par O (cas $\lambda = 1$) ou les change en leurs symétriques par rapport à O (cas $\lambda = -1$).

Dans les deux cas, chaque point du plan passant par O perpendiculairement à la droite reste évidemment dans le plan. Aussi Φ induit dans ce plan une transformation orthogonale Φ' à point fixe O. Comme Φ conserve par hypothèse l'orientation de l'espace et échange pour $\lambda = -1$ les demi-espaces définis par le plan, Φ' inverse l'orientation du plan pour $\lambda = -1$. Φ' étant une transformation à point fixe est une symétrie dans le plan et a une droite de points invariants. Ces points sont évidemment les points fixes de la rotation Φ.

Ainsi, *toute rotation dans l'espace laisse invariants les points d'une droite.*

Cette droite s'appelle l'*axe de rotation*. La rotation Φ induit une rotation d'un angle α de chaque plan perpendiculaire à son axe, α étant le même pour tous les plans (pourquoi ?). L'angle α est par définition l'*angle de rotation* de la transformation Φ. Il est évident que Φ est bien définie par la donnée de son axe et de son angle, si bien qu'on identifie deux rotations si et seulement si elles ont même axe et même angle. (On rappelle que l'angle α est choisi dans les limites $-\pi < \alpha \leqslant \pi$; il est clair que la rotation d'angle π et la rotation d'angle $-\pi$ sont identiques.)

LEÇON 28

Théorème de Desargues. — Théorème de Pappus-Pascal. — Théorème de Fano. — Principe de dualité. — Modèles du plan projectif. — Modèles de la droite projective et de l'espace projectif. — Droite projective complexe.

En géométrie projective, il existe une relation entre les points et les droites qu'on appelle relation d'*incidence* (ou d'appartenance). On dit que le point A appartient à la droite d ou que la droite d passe par le point A, ou encore, pour souligner le caractère symétrique de la relation, que le point A et la droite d sont *incidents*.

Bien que pauvre de prime abord, cette relation permet d'énoncer et de démontrer des théorèmes ardus et élégants tels que le résultat connu de Desargues (qui fut le premier théorème de la géométrie projective).

Théorème 1 (Desargues). *Soient* **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** *des points distincts deux à deux tels que les droites* **14**, **25** *et* **36** *soient incidentes à un même point distinct des points* **1** *à* **6**. *Alors les points* **13·46**, **35·62**, **51·24** *sont incidents à une même droite.*

Le symbole **13**, **14**, . . . désigne la droite passant par les points **1** et **3**, **1** et **4**, . . ., et le symbole **13·46** est le point d'intersection des droites **13** et **46**. Le théorème est faux dans le plan affine parce que deux droites de ce plan ne se coupent pas nécessairement.

La **démonstration du théorème de Desargues** s'effectue au mieux (comme celle des autres théorèmes analogues) moyennant le modèle $\mathcal{P}_O$ de la géométrie projective. Les points de $\mathcal{P}_O$ sont des droites de l'espace qui passent par le point O. Chaque droite est déterminée par la donnée d'un vecteur directeur **a** défini à un facteur de proportionnalité près. On considère donc ces vecteurs directeurs et non les droites mêmes. En d'autres termes, les points du plan projectif $\mathcal{P}_O$ s'interprètent comme vecteurs non nuls dans l'espace, qu'on donne à un facteur de proportionnalité près.

Les points de la droite passant par les points **a** et **b** s'écrivent $\mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$, où $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$.

Dans cet ordre d'idées, le théorème de Desargues prend la forme « vectorielle » suivante :

Etant donnés les vecteurs de l'espace $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$ *non colinéaires deux à deux, on suppose qu'il existe des nombres* α_1, α_2, α_3,

α_4, α_5, α_6 *non nuls tels que*

(1) $$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_4\mathbf{a}_4 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_5\mathbf{a}_5 = \alpha_3\mathbf{a}_3 + \alpha_6\mathbf{a}_6.$$

Alors on trouve des quadruplets de nombres $(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6)$, $(\gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_2)$, $(\delta_5, \delta_1, \delta_2, \delta_4)$ *contenant chacun au moins un nombre non nul pour lesquels on a les égalités*

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_3\mathbf{a}_3 = \beta_4\mathbf{a}_4 + \beta_6\mathbf{a}_6,$$

$$\gamma_3\mathbf{a}_3 + \gamma_5\mathbf{a}_5 = \gamma_6\mathbf{a}_6 + \gamma_2\mathbf{a}_2,$$

$$\delta_5\mathbf{a}_5 + \delta_1\mathbf{a}_1 = \delta_2\mathbf{a}_2 + \delta_4\mathbf{a}_4,$$

et ces trois vecteurs sont coplanaires.

C'est justement cet énoncé du théorème de Desargues que nous nous proposons de démontrer.

Les vecteurs $\mathbf{a}_{1\text{-}6}$ étant donnés à un facteur de proportionnalité près et tous les nombres $\alpha_{1\text{-}6}$ étant non nuls, on remplace chaque $\mathbf{a}_i$ par le vecteur $\alpha_i\mathbf{a}_i$, et (1) se récrit

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6,$$

d'où on tire de suite les égalités

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_6,$$

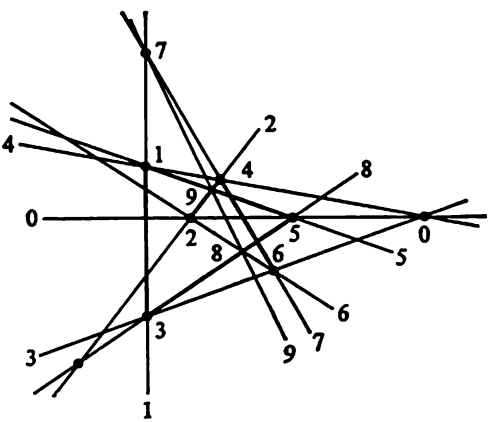
$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_6 + \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4.$$

Du moment que

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_5) + (\mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_1) = 0,$$

le théorème se trouve démontré. □



Configuration de Desargues

La démonstration prend moins de place que l'énoncé!

A part les points 1 à 6, le théorème de Desargues fait appel aux points

$$14\cdot 25 = 14\cdot 36, \quad 13\cdot 46, \quad 35\cdot 62, \quad 51\cdot 24.$$

On les désigne (dans cet ordre) par 0, 7, 8, 9. Les dix points 0 à 9 sont sur dix droites

$$25,\ 37,\ 49,\ 06,\ 01,\ 19,\ 28,\ 64,\ 35,\ 78.$$

Si on les désigne (dans cet ordre) par les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le théorème de Desargues s'énonce comme suit:

(*) *Si chacun des points* 0 *à* 8 *est incident à la droite de même numéro, alors le point* 9 *et la droite* 9 *sont incidents.*

Ces 10 points et 10 droites forment la *configuration de Desargues.* Tout point de cette configuration est incident exactement à trois droites et toute droite l'est exactement à trois points.

Deux triangles sont dits *perspectifs* si les droites qui passent par les sommets homologues concourent toutes les trois en un même point (*centre de perspective*). Dans la configuration de Desargues, ce sont par exemple les triangles 135 et 246 de centre de perspective 0. En termes de triangles perspectifs, le théorème de Desargues dit que *les points d'intersection des côtés homologues des triangles perspectifs sont sur une même droite* (dite *droite arguésienne*).

On révèle par exploration des 10 points et des 10 droites de la configuration de Desargues qu'elle a la propriété remarquable *de ne pas posséder de droites ni de points privilégiés*: chaque point (resp. droite) est le centre de perspective (resp. droite arguésienne) d'un couple bien défini de triangles perspectifs.

* * *

Quand les triplets 1, 3, 5 et 2, 4, 6 sont colinéaires, le théorème devient trivial (les points 7, 8, 9 coïncident). On a en revanche le

Théorème 2 (Pappus-Pascal). *Soient* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *des points distincts deux à deux. Si les points* 1, 3, 5 *sont incidents à une même droite et les points* 2, 4, 6 *sont incidents à une même droite* (*distincte de la première*), *aucun point n'étant sur les deux droites à la fois, alors les points* 14·23, 45·36, 52·61 *sont incidents à une même droite.*

Démonstration. Ce théorème s'énonce en termes de vecteurs: *si*

1) *les vecteurs* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$ *sont non colinéaires deux à deux,*

2) *les vecteurs* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$ *sont coplanaires ainsi que* $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$,

3) *chacun des* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$ *n'est pas coplanaire aux vecteurs* $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$, *et chacun des* $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$ *n'est pas coplanaire aux vecteurs* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$,

alors les vecteurs $\mathbf{a}_7$, $\mathbf{a}_8$, $\mathbf{a}_9$ *définis par les formules*

$$\mathbf{a}_7 = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_4\mathbf{a}_4 = \nu_2\mathbf{a}_2 + \nu_3\mathbf{a}_3,$$
$$\mathbf{a}_8 = \mu_2\mathbf{a}_2 + \mu_5\mathbf{a}_5 = \nu_1\mathbf{a}_1 + \nu_6\mathbf{a}_6,$$
$$\mathbf{a}_9 = \mu_3\mathbf{a}_3 + \mu_6\mathbf{a}_6 = \nu_4\mathbf{a}_4 + \nu_5\mathbf{a}_5$$

se trouvent dans un même plan.

Soient $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ des vecteurs tels que

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2$$

(voir propositions 2 et 3 de la leçon 7). Il est clair que $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ sont linéairement indépendants et que $\mathbf{a}_{1\text{-}6}$ en sont combinaison linéaire. Le coefficient de $\mathbf{e}_2$ (resp. $\mathbf{e}_1$) dans la relation linéaire entre les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$ (resp. $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$) et $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ est nul et le coefficient de $\mathbf{e}_1$ (resp. $\mathbf{e}_2$) non nul. Puisque les vecteurs $\mathbf{a}_{1\text{-}6}$ sont donnés à la colinéarité près, on suppose sans restreindre la généralité que

$$\mathbf{a}_1 = k_1\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = k_2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{a}_3 = k_3\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_4 = k_4\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{a}_5 = k_5\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_6 = k_6\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_2,$$

avec $k_{1\text{-}6}$ des nombres. On porte ces expressions dans la formule pour $\mathbf{a}_7$ et on a de suite

$$\mathbf{a}_7 = (\mu_1k_1 + \mu_4k_4)\,\mathbf{e}_0 + \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_4\mathbf{e}_2 = \\ = (\nu_2k_2 + \nu_3k_3)\,\mathbf{e}_0 + \nu_3\mathbf{e}_1 + \nu_2\mathbf{e}_2.$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ étant linéairement indépendants, l'égalité a lieu si et seulement si $\mu_1 = \nu_3$, $\mu_4 = \nu_2$ et $\mu_1k_1 + \mu_4k_4 = \nu_2k_2 + \nu_3k_3$. Donc

$$\mu_1\,(k_1 - k_3) = \mu_4\,(k_2 - k_4).$$

Puisque $\mathbf{a}_7$ est donné à la colinéarité près, on estime que $\mu_1 = k_2 - k_4$ (évidemment $k_2 \neq k_4$), donc $\mu_4 = k_1 - k_3$. Ainsi

$$\mathbf{a}_7 = [(k_2 - k_4)\,k_1 + (k_1 - k_3)\,k_4]\,\mathbf{e}_0 + (k_2 - k_4)\,\mathbf{e}_1 + \\ + (k_1 - k_3)\,\mathbf{e}_2 = (k_1k_2 - k_3k_4)\mathbf{e}_0 + \\ + (k_2 - k_4)\,\mathbf{e}_1 + (k_1 - k_3)\,\mathbf{e}_2.$$

On démontre de même les formules

$$\mathbf{a}_8 = (k_1k_2 - k_5k_6)\,\mathbf{e}_0 + (k_2 - k_6)\,\mathbf{e}_1 + (k_1 - k_5)\,\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{a}_9 = (k_3k_4 - k_5k_6)\,\mathbf{e}_0 + (k_4 - k_6)\,\mathbf{e}_1 + (k_3 - k_5)\,\mathbf{e}_2.$$

Dans ce cas $\mathbf{a}_7 + \mathbf{a}_9 = \mathbf{a}_8$ et les vecteurs $\mathbf{a}_7$, $\mathbf{a}_8$, $\mathbf{a}_9$ sont dans un même plan. □

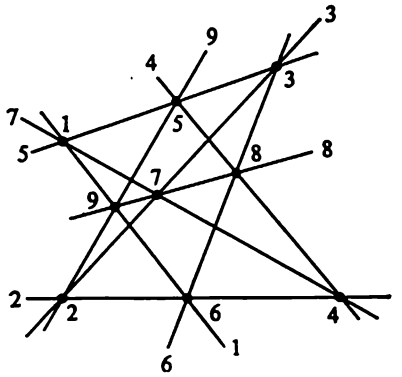
Le théorème de Pappus-Pascal contient, avec les points 1 à 6, les points 7 = 14·23, 8 = 45·36, 9 = 52·61 et neuf droites

69, 46, 27, 58, 13, 38, 14, 78, 25.

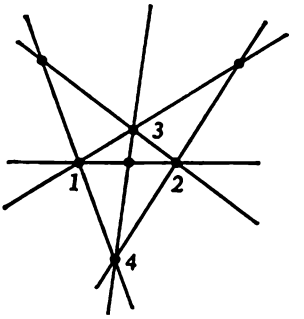
Si on numérote ces droites (prises dans cet ordre) par les chiffres 1 à 9, on aboutit à l'énoncé suivant du théorème considéré:

(*) *Si chacun des points* 1 *à* 8 *est incident à la droite de même numéro, alors le point* 9 *et la droite* 9 *sont incidents.*

On a le théorème de Desargues au numérotage des droites près! Il se trouve que tout un groupe de théorèmes, dits *théorèmes de configuration*, sont susceptibles de prendre la forme (*) (le nombre de



Configuration de Pappus



Théorème de Fano

points et de droites étant en général autre que celui des cas considérés). Les théorèmes de Desargues et de Pappus-Pascal en sont les spécimens à la fois les plus importants et les plus simples.

Le théorème de Pappus-Pascal donne lieu à une configuration formée de 9 points et de 9 droites, connue sous le nom de *configuration de Pappus*. Comme dans la configuration de Desargues, par tout point il passe ici trois droites, et toute droite contient trois points. On note de plus l'absence de droites et de points privilégiés.

* * *

Voici un exemple de résultat de la géométrie projective qui n'est pas un théorème de configuration.

Théorème 3 (Fano). *Si les points* 1, 2, 3, 4 *ne sont pas colinéaires trois à trois, alors les points*

12·34, 13·24, 14·23

ne sont pas colinéaires.

Démonstration. Il faut montrer que si trois quelconques des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ ne sont pas coplanaires, il en est de même des vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 = \alpha_3\mathbf{a}_3 + \alpha_4\mathbf{a}_4, \\ \mathbf{b} &= \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_3\mathbf{a}_3 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_4\mathbf{a}_4, \\ \mathbf{c} &= \gamma_2\mathbf{a}_2 + \gamma_3\mathbf{a}_3 = \gamma_1\mathbf{a}_1 + \gamma_4\mathbf{a}_4. \end{aligned} \tag{2}$$

En effet, on a par ces égalités

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 - \alpha_3\mathbf{a}_3 - \alpha_4\mathbf{a}_4 &= \mathbf{0}, \\ \beta_1\mathbf{a}_1 - \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_3\mathbf{a}_3 - \beta_4\mathbf{a}_4 &= \mathbf{0}, \\ \gamma_1\mathbf{a}_1 - \gamma_2\mathbf{a}_2 - \gamma_3\mathbf{a}_3 + \gamma_4\mathbf{a}_4 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sont non coplanaires (i.e. linéairement indépendants) par hypothèse, ces égalités sont possibles si et seulement s'il y a proportionnalité de leurs coefficients. Ainsi, on trouve $k \neq 0$ et $l \neq 0$ tels que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= k\alpha_1, & \beta_2 &= -k\alpha_2, & \beta_3 &= -k\alpha_3, & \beta_4 &= k\alpha_4, \\ \gamma_1 &= l\alpha_1, & \gamma_2 &= -l\alpha_2, & \gamma_3 &= l\alpha_3, & \gamma_4 &= -l\alpha_4. \end{aligned}$$

D'autre part, les premières égalités (2) signifient que les coordonnées des $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ dans la base $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sont

$$(\alpha_1, \alpha_2, 0), \quad (\beta_1, 0, \beta_3), \quad (0, \gamma_2, \gamma_3).$$

Comme

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 = -2kl\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \neq 0,$$

ces vecteurs ne sont pas coplanaires. □

Le chiffre 2 dans la dernière formule signifie que le théorème de Fano ne joue que si le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique $\neq 2$. Quant aux théorèmes de Desargues et de Pappus-Pascal, ils sont indépendants de $\mathbb{K}$.

* * *

Si nous avons utilisé dans les démonstrations ci-dessus les vecteurs, nous l'avons fait uniquement pour simplifier les calculs. On pourrait très bien se placer dans un système quelconque de coordonnées projectives et répéter les mêmes raisonnements.

On sait qu'en géométrie projective du plan les points et les droites jouent des rôles parfaitement symétriques. Analytiquement, la condition d'incidence

$$AX + BY + CZ = 0 \tag{3}$$

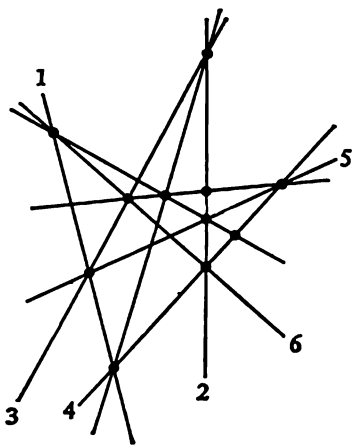
d'un point $(X : Y : Z)$ et d'une droite $(A : B : C)$ est complètement symétrique par rapport aux coordonnées du point et à celles de la droite. Si l'on associe à chaque point (resp. droite) une droite (resp. point) de mêmes coordonnées, la relation d'incidence entre points et droites reste entière : par exemple, les points incidents à une droite deviennent des droites incidentes au point associé à cette droite. Ainsi, on a établi le

Principe de dualité dans le plan projectif. *A toute proposition relative aux points, aux droites et aux relations d'incidence en correspond une autre que l'on déduit de la première en échangeant les mots « point » et « droite ».*

C'est la proposition *duale* (ou *corrélative*) de la première.

Ce principe *ne constitue pas* un théorème de la géométrie projective parce qu'il parle des théorèmes et non des points et des droites.

L'affirmation « deux points quelconques sont incidents à une même droite » a pour duale « deux droites quelconques sont incidentes à un même point ». On observe que la première est juste en géométrie affine tandis que la seconde ne l'est pas.



Théorème de Pappus-Brianchon

Un cas plus intéressant est le théorème dual du théorème de Pappus-Pascal.

Théorème 4 (Pappus-Brianchon). *Soient* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *des droites distinctes deux à deux. Si les droites* 1, 3, 5 *sont incidentes à un même point et les droites* 2, 4, 6 *sont incidentes à un même point (distinct du premier), aucune droite ne contenant les deux points à la fois, alors les droites*

$$14\cdot 23, \quad 45\cdot 36, \quad 52\cdot 61$$

sont incidentes à un même point. □

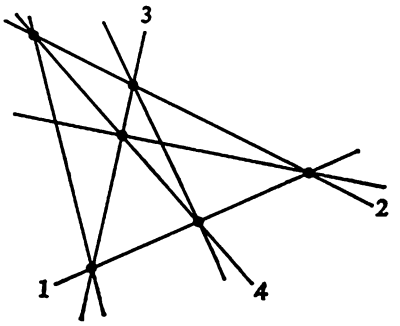
Ici, disons, 14 est le point où se coupent les droites 1 et 4 et 14·23 la droite passant par les points 14 et 23.

Comme le résultat de Pappus-Pascal, ce théorème dit qu'il existe une configuration. Chose remarquable, *c'est encore la configuration de Pappus.*

En effet, le théorème dual de (*) coïncide évidemment avec cet énoncé (dont on dit qu'il est *autodual*). Le théorème de Pappus-Pascal garantit cette configuration à partir de deux triplets de points et celui de Pappus-Brianchon à partir de deux triplets de droites. □

De même, le corrélatif du théorème de Desargues (qui non seulement ne coïncide pas avec celui-ci, mais encore en est la réciproque, résultat dont on se convainc facilement) garantit la configuration de Desargues avec 10 points et 10 droites.

Le corrélatif du théorème de Fano dit qu'étant données quatre



Théorème dual du théorème de Fano

droites quelconques 1, 2, 3, 4 non passant trois à trois par un même point, les droites 12·34, 13·24, 14·23 (« diagonales généralisées du quadrilatère ») n'ont pas de point commun.

* * *

Passons aux représentations sensibles des modèles du plan projectif réel.

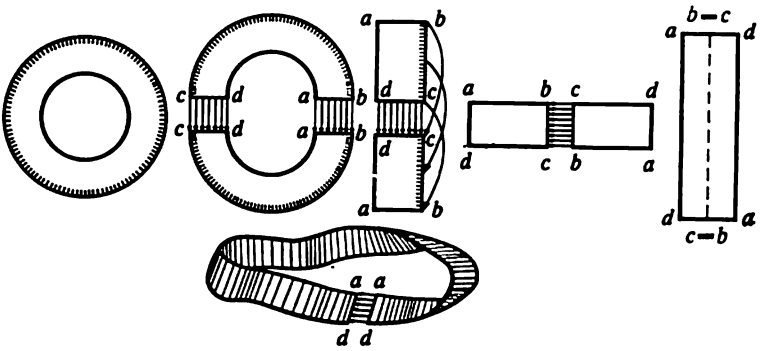
Le modèle « dans le cercle » est un cercle dont les points diamétralement opposés sont identifiés (« collés »). Cette opération est malheureusement impossible dans l'espace de dimension 3 même pour un cercle en matière très élastique. Il en va autrement d'un cercle dans lequel on découpe un cercle plus petit. On obtient ainsi une couronne circulaire dont on identifie les points diamétralement opposés de la plus grande circonférence (v. au verso).

Après avoir coupé la couronne suivant les rayons *ab* et *cd*, on obtient deux rectangles faciles à coller de façon voulue. Le rectangle résultant a ses deux côtés opposés confondus avec les bords des coupures. On effectue une torsion et on colle *a* contre *a* et *d* contre *d*. La surface gauche ainsi obtenue s'appelle *ruban de Möbius*.

Le bord du ruban de Möbius est une circonférence (c'est le bord du cercle primitif découpé dans le plan projectif). Il suffit donc, pour obtenir de nouveau le plan projectif, de coller un cercle sur la circonférence frontière du ruban. Dans l'espace de dimension 3, on n'y arrive pas sans recoupement. Dans l'espace de dimension 4,

on choisit un point quelconque extérieur à l'espace 3-dimensionnel contenant le ruban de Möbius et on construit un cône de sommet ce point dont la circonférence de la base est la circonférence frontière du ruban.

Les livres de mathématiques récréatives parlent volontiers des



Transformation du plan projectif « avec un trou » en le ruban de Möbius

propriétés remarquables du ruban de Möbius (par exemple de sa propriété d'être une surface à face unique), si bien que nous nous dispensons de les décrire.

* * *

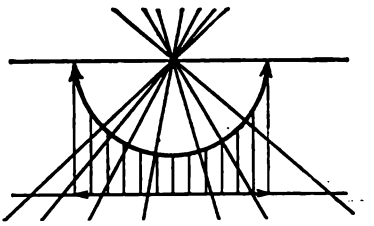
On n'a aucune difficulté à se représenter intuitivement la droite projective (qui est l'espace projectif réel de dimension 1). Son modèle analogue au modèle « dans la gerbe » du plan projectif est un faisceau de droites du plan à centre en un point O. Si l'on transforme la demi-circonférence de centre O en un segment, le modèle de la droite projective (qui soit un analogue du modèle « dans le cercle ») est un segment (i.e. « un cercle à 1 dimension ») aux extrémités identifiées. Par cette identification le segment devient une circonférence. Ainsi, *le modèle de la droite projective est une circonférence.*

S'agissant de l'espace projectif (de dimension 3), l'analogue du modèle « dans le cercle » est le modèle « dans la boule ». Dans ce modèle, les points de l'espace projectif sont représentés par les points intérieurs à la boule et par les couples de points diamétralement opposés de la sphère.

Soit, par exemple, une boule de rayon π et soit O son centre. Tout point $M \neq 0$ définit bien la droite OM et le nombre $\alpha = |OM|$, $0 < \alpha \leqslant \pi$. On associe à ce point une rotation d'angle α autour de l'axe OM dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (pour un observateur placé suivant OM dans la direction du vec-

teur $\overrightarrow{OM}$) et au point O la transformation identique (la rotation d'angle 0). On conçoit qu'avec divers M de la boule, on effectue toutes les rotations possibles dans l'espace. Ceci étant, à deux points différents il correspond des rotations distinctes à condition qu'ils ne soient pas des points diamétralement opposés de la sphère (sinon on a une même rotation).

On voit donc que le modèle de l'espace projectif de dimension 3 est le groupe Rot_O (3) des rotations de l'espace. Ce groupe étant



Modèle de la droite projective

isomorphe au groupe SO (3) des matrices orthogonales unimodulaires, on dit que *l'ensemble* SO (3) *des matrices orthogonales unimodulaires d'ordre* 3 *est un modèle de l'espace projectif réel de dimension* 3.

On voit en particulier que les matrices du groupe SO (3) sont paramétrées par les quadruplets $(a^0 : a^1 : a^2 : a^3)$ de nombres donnés à un facteur de proportionnalité près. Ce paramétrage s'effectue par des formules explicites très élégantes, mais le temps nous manque pour les écrire.

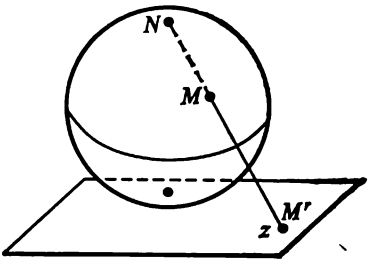
* * *

Les espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^n$ ne se prêtent à une interprétation intuitive analogue que pour $n = 1$ (car déjà $\mathbb{C}P^2$ est de dimension réelle 4, ce qui exclut toute représentation sensible). Quant à la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$, elle est par définition l'ensemble de classes de proportionnalité $(z_0 : z_1)$ des couples de nombres complexes (z_0, z_1). Lorsque $z_0 \neq 0$, chaque classe est caractérisée de façon unique par le nombre complexe $z = \frac{z_1}{z_0}$, et pour $z_0 = 0$ il existe une classe $(0 : 1)$ et une seule. Avec la notation $(0 : 1) = \infty$, le résultat s'énonce comme suit : *le modèle de la droite projective complexe est l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes auxquels on adjoint le symbole* ∞.

Chaque nombre complexe $z = x + iy$ est représenté dans le plan (dans un système donné de coordonnées rectangulaires) par un point de coordonnées x, y. Aussi nous dirons que l'ensemble $\mathbb{C}$ constitue

le *plan des nombres complexes* (l'appellation courante « plan complexe » nous paraît malheureuse car on donne également ce nom à un plan sur $\mathbb{C}$ qui est de dimension 4 du point de vue « réel »). Le plan $\mathbb{C}^+$ formé par adjonction à $\mathbb{C}$ du symbole ∞ est dit *fermé*.

Soit, sur la sphère S de l'espace tridimensionnel, un point N quelconque et soit le plan π tangent à S en le point diamétralement opposé. On définit pour tout point $M \neq N$ de S la droite NM coupant π. En faisant correspondre à M le point M' en lequel NM rencontre le plan π, on obtient la bijection $M \mapsto M'$ (*projection stéréographique*) de la sphère S privée de N sur π.



Sphère riemannienne

Si l'on assimile π au plan des nombres complexes on peut en particulier représenter les nombres complexes par les points de la sphère privée de N seul. Si l'on fait correspondre à N le symbole ∞, on établit une bijection entre les points du plan fermé $\mathbb{C}^+$ et ceux de S, ce qui explique le nom de *sphère des nombres complexes* (ou *sphère de Riemann*) qu'on donne à $\mathbb{C}^+$.

Ainsi, *la sphère constitue un modèle de la droite projective complexe.*

LEÇON 29

Transformations homographiques.— Transformations linéaires.— Inversion.— Inversion et homographies.— Deux propriétés des transformations homographiques.— Points fixes des transformations homographiques.— Homographies paraboliques, elliptiques, hyperboliques et loxodromiques.— Théorème de trois points.— Multiplicateur d'une transformation homographique non parabolique.— Classification des homographies.— Formules de la projection stéréographique.— Rotations de la sphère en tant que transformations homographiques du plan.— Déplacement ramenant un cube sur lui-même.

Quels que soient les nombres complexes a, b, c, d vérifiant la relation

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

la formule

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

définit la transformation $z \mapsto w$ du plan fermé $\mathbb{C}^+$ en lui-même. (Par définition, $w = \frac{a}{c}$ pour $z = \infty$ et $w = \infty$ pour $z = -\frac{d}{c}$; en particulier, si $c = 0$, alors $w = \infty$ pour $z = \infty$.)

Définition 1. Les transformations $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ de la forme (1) s'appellent les *transformations homographiques.*

Elles sont étroitement liées avec les transformations projectives de la droite $\mathbb{C}P^1$. En effet, toute transformation $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ étant définie par égalité des coordonnées projectives est déterminée en coordonnées projectives homogènes par les mêmes formules qu'une transformation des coordonnées projectives (voir leçon 27), i.e. par les égalités (4) de la leçon 26. Pour $n = 1$, elles s'écrivent aux notations près

$$\begin{aligned} \rho w_0 &= cz_0 + dz_1, \\ \rho w_1 &= az_0 + bz_1, \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0,$$

si bien qu'en passant aux coordonnées non homogènes $z = \frac{z_1}{z_0}$, $w = \frac{w_1}{w_0}$, on obtient la transformation (1). Ainsi, *les transformations homographiques* (1) *ne sont rien d'autre que les transformations projectives de la droite projective complexe représentée par* $\mathbb{C}^+$. □

Il est clair que *les transformations homographiques forment un groupe*, i.e. le produit de deux transformations homographiques est une transformation homographique, ainsi que l'inverse d'une transformation homographique. Ceci étant, l'inverse de (1) se définit

par

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Conformément aux résultats antérieurs, le groupe des transformations homographiques est isomorphe au groupe Proj (1 ; $\mathbb{C}$).

Le fait de multiplier tous les coefficients a, b, c, d par un même $\rho \neq 0$ conserve la transformation (1), si bien que toute homographie prend la forme (1) sous la condition supplémentaire

$$ad - bc = 1.$$

Cette écriture sera dite *normée*. Chaque transformation homographique admet deux écritures normées qui sont réductibles l'une à l'autre en multipliant tous les coefficients par —1.

* * *

Pour $a = d = 1$, $c = 0$, on a

(2) $$w = z + b.$$

Si le nombre complexe $b = b_1 + ib_2$ s'interprète comme vecteur (de coordonnées b_1, b_2), cette transformation est une translation de vecteur b.

Soit $d = 1$, $b = c = 0$, auquel cas

(3) $$w = az.$$

Cette transformation s'écrit pour $|a| = 1$, i.e. pour

$$a = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

(ou encore $a = e^{i\alpha}$) :

(4) $$w = e^{i\alpha}z.$$

C'est une rotation d'angle α (pour l'affirmer, il suffit d'écrire (4) en coordonnées rectangulaires $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$). Quand $a = r > 0$ est réel positif, la transformation (3) est une homothétie de rapport r. Dans le cas général $a = re^{i\alpha}$, la transformation (3) est la composée d'une rotation d'angle $\alpha = \arg a$ et d'une homothétie de rapport $r = |a|$.

Les transformations (2) et (3) sont deux cas particuliers des homographies

(5) $$w = az + b$$

obtenues pour $c = 0$ et $d = 1$. Ces transformations sont dites *linéaires*.

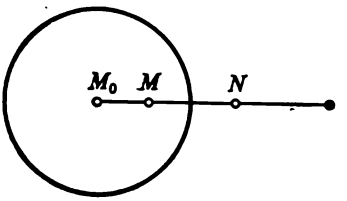
Chaque transformation linéaire se ramène à la translation (2) suivie de (3). En particulier, on a pour $|a| = 1$ un déplacement (inversement, tout déplacement du plan est la transformation li-

néaire (5), où $|a| = 1$). Il en résulte que *les transformations linéaires sont exactement les similitudes.* □

On observe que l'écriture (5) n'est pas normée (pour $a \neq 1$).

* * *

Soient T une circonférence quelconque de rayon R et M_0 le



Points symétriques par rapport à la circonférence

centre de T. On dit des points M et N (distincts de M_0) qu'ils sont *symétriques par rapport à* T si

a) ils sont sur une même demi-droite issue de M_0;

b) on a l'égalité

$$|M_0M| \cdot |M_0N| = R^2.$$

Le point M_0 est par définition le symétrique du point ∞.

Si M_0, M et N sont repérés par les nombres complexes z_0, z et w, alors on a au lieu de a) et b):

a) les nombres $z - z_0$ et $w - z_0$ sont de même argument:

$$\arg(z - z_0) = \arg(w - z_0);$$

b) leurs modules vérifient l'égalité

$$|z - z_0| \cdot |w - z_0| = R^2.$$

D'après b), les nombres complexes $w - z_0$ et $\dfrac{R^2}{\overline{z - z_0}}$ ont même module, et il y a égalité des arguments par a). Donc

$$w - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}. \tag{6}$$

Ainsi, les points figuratifs des nombres complexes z et w (ou les points z et w tout court) sont symétriques par rapport à une circonférence de rayon R et de centre z_0 si et seulement si l'on a l'égalité (6).

On peut dire que la formule (6) détermine une transformation $z \longrightarrow w$ du plan fermé $\mathbb{C}^+$.

Définition 2. La transformation (6) du plan $\mathbb{C}^+$ qui change tout point z en w qui est son symétrique par rapport à la circonférence T, s'appelle l'*inversion* par rapport à T.

Le centre M_0 est dans cette transformation changé en le point ∞ et vice versa.

* * *

Dans le cas particulier de T *circonférence unité* (de rayon 1 et de centre $z_0 = 0$), la formule (6) s'écrit

$$w = \frac{1}{\bar{z}} \tag{7}$$

qui entraîne que son produit par $z \mapsto \bar{z}$ est la transformation homographique

$$w = \frac{1}{z}. \tag{8}$$

La transformation $z \mapsto \bar{z}$ est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses $y = 0$. Ainsi, la transformation homographique (8) se ramène à une symétrie par rapport à une droite suivie d'une inversion par rapport à une circonférence.

En théorie des transformations homographiques, il y a intérêt à assimiler les droites à des circonférences. La raison analytique formelle en est la propriété de l'équation

$$E\,(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

de donner pour $E \neq 0$ (et pour $A^2 + B^2 > 4EC$) une circonférence et pour $E = 0$ une droite. On dit donc naturellement d'une symétrie par rapport à une droite que c'est une *inversion par rapport à cette droite* et que *la transformation homographique* (8) *est la composée de deux inversions.* □

L'inversion par rapport à la circonférence de rayon R et de centre $z_0 = 0$ est donnée par

$$w = \frac{R^2}{\bar{z}}$$

et le résultat de sa composition avec (7) par

$$w = R^2 z,$$

i.e. c'est une homothétie de rapport R^2. Tout nombre réel positif pouvant être mis sous forme de R^2, on vient de démontrer en particulier que *toute homothétie est le produit de deux inversions.* □

Il est déjà apparu (voir leçon 27) que tout déplacement du plan est le produit de deux inversions (de deux symétries par rapport à des droites). Par conséquent, *toute transformation linéaire* (*toute similitude*) *est le produit de quatre inversions.* □

La formule

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}-\frac{1}{c(cz+d)}$$

(on suppose que $ad - bc = 1$) montre qu'avec $c \neq 0$, la transformation homographique (1) se ramène à la transformation linéaire $z \mapsto cz + d$, suivie de $z \mapsto \frac{1}{z}$ et de la transformation linéaire $z \mapsto -\frac{1}{c}z + \frac{a}{c}$. Cela démontre, compte tenu des résultats précédents, la

Proposition 1. *Toute transformation homographique est le produit d'un nombre pair d'inversions.* □

* * *

Comme

$$z\bar{z}=x^2+y^2, \quad x=\frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

l'équation (9) de la circonférence (ou de la droite) se met sous forme

$$Ez\bar{z}+A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+B\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+C=0,$$

i.e.

$$Ez\bar{z}+\bar{P}z+P\bar{z}+C=0, \tag{10}$$

avec E et C des nombres réels et $P = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$ un nombre complexe.

La transformation (8) change cette circonférence en la courbe d'équation

$$E+\overline{Pz}+Pz+Cz\bar{z}=0,$$

i.e. en une autre circonférence (qui est une droite si $C = 0$). Toute transformation homographique est, on l'a dit, ou bien une transformation linéaire, i.e. une similitude (qui transforme nécessairement toute circonférence en une circonférence), ou bien la composée de (8) et de deux transformations linéaires de sorte que toute *transformation homographique change une circonférence ou une droite en une circonférence ou une droite.* □

Cette propriété des transformations homographiques est connue sous le nom de *caractère circulaire.*

Comme toute inversion (6) diffère d'une transformation homographique par une symétrie, *toute inversion présente le caractère circulaire.* □

Lemme 1. *Deux circonférences (ou deux droites)*

$$E(x^2+y^2)+Ax+By+C=0 \tag{11}$$

et

(12) $$E_1(x^2+y^2)+A_1x+B_1y+C_1=0$$

sont orthogonales (se coupent à angle droit) si et seulement si

(13) $$AA_1+BB_1=2(EC_1+E_1C).$$

Démonstration. Si $E \neq 0$, la circonférence (11) est centrée en $\left(-\frac{A}{2E}, -\frac{B}{2E}\right)$ et

(14) $$R^2=\frac{A^2+B^2-4EC}{4E^2}.$$

De même, le centre de la circonférence (12) est repéré pour $E_1 \neq 0$ par $-\frac{A_1}{2E_1}$, $-\frac{B_1}{2E_1}$, et R_1^2 se définit par

(15) $$R_1^2=\frac{A_1^2+B_1^2-4E_1C_1}{4E_1^2}.$$

D'autre part, on établit par des raisonnements géométriques élémentaires qu'une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité des circonférences (11) et (12) est que la somme $R^2+R_1^2$ des carrés de leurs rayons soit égale au carré de la distance entre les centres:

$$R^2+R_1^2=\left(\frac{A}{2E}-\frac{A_1}{2E_1}\right)^2+\left(\frac{B}{2E}-\frac{B_1}{2E_1}\right)^2.$$

On y porte les relations (14), (15) et on obtient la condition (13) à force d'effectuer certaines simplifications.

Si $E_1=0$, i.e. si la circonférence (12) est en réalité la droite $A_1x+B_1y+C_1=0$, l'orthogonalité de cette droite et de la circonférence (11) signifie que la droite passe par le centre de (11), i.e.

$$A_1\left(-\frac{A}{2E}\right)+B_1\left(-\frac{B}{2E}\right)+C_1=0.$$

Des simplifications conduisent de nouveau à la condition (13) (avec $E_1=0$).

Soit, enfin, $E=0$ et $E_1=0$. La condition (13) devient $AA_1+BB_1=0$, condition connue de perpendicularité de deux droites. □

Si les équations (11) et (12) prennent la forme (10)

$$Ez\bar{z}+\bar{P}z+P\bar{z}+C=0$$

et

$$E_1z\bar{z}+\bar{P}_1z+P_1\bar{z}_1+C_1=0,$$

la condition (13) devient

(16) $$P\bar{P}_1+\bar{P}P_1=EC_1+E_1C.$$

La transformation (8) change, on l'a montré, la circonférence (11) en une circonférence telle que les coefficients E et C soient échangés et P soit remplacé par son complexe conjugué $\overline{P}$.

Ce changement de coefficients est symbolisé par

$$E \Rightarrow C, \quad C \Rightarrow E, \quad P \Rightarrow \overline{P}. \tag{17}$$

De même,

$$E_1 \Rightarrow C_1, \quad C_1 \Rightarrow E_1, \quad P_1 \Rightarrow \overline{P}_1 \tag{18}$$

pour la circonférence (12). Il est clair que (17) et (18) laissent invariante la relation (16) (elle se transforme en elle-même). Ainsi, la transformation homographique (8) conserve l'orthogonalité de circonférences, i.e. elle change les circonférences orthogonales en des circonférences orthogonales.

Puisque toute homographie est le produit de transformations linéaires et de (8), il s'ensuit que *l'orthogonalité de circonférences est conservée par toute transformation homographique* (car les transformations linéaires étant des similitudes jouissent de cette propriété). □

Remarque. En fait, les transformations homographiques conservent tous les angles (et non seulement les angles droits) et sont *des transformations conformes* (la démonstration de cette propriété dépasse le cadre de cet ouvrage).

Le théorème de géométrie élémentaire qui porte sur le carré de la longueur de la tangente à une circonférence entraîne de suite que deux points M et N sont symétriques par rapport à la circonférence T si et seulement si toute circonférence passant par M et N est orthogonale à T. L'affirmation reste évidemment valable pour T une droite. Puisque toute transformation homographique Φ change les circonférences (resp. droites) orthogonales en des circonférences (resp. droites) orthogonales, il en résulte que *les points M et N symétriques par rapport à une circonférence T quelconque deviennent par chaque Φ les points $M' = \Phi(M)$ et $N' = \Phi(N)$ symétriques par rapport à la circonférence $T' = \Phi(T)$.* □

* * *

Les points conservés par la transformation homographique (1) en sont les *points fixes*. Les points fixes sont définis à partir de l'équation

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

i.e. à partir de

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{19}$$

Puisqu'une équation du deuxième degré a au plus deux racines, on en tire qu'*une transformation homographique non identique possède au plus deux points fixes.* □

On a par suite de la condition de normalisation $ad - bc = 1$:

$$(d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4,$$

si bien que *les points fixes de* (1) *normée se définissent par la formule*

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}. \tag{20}$$

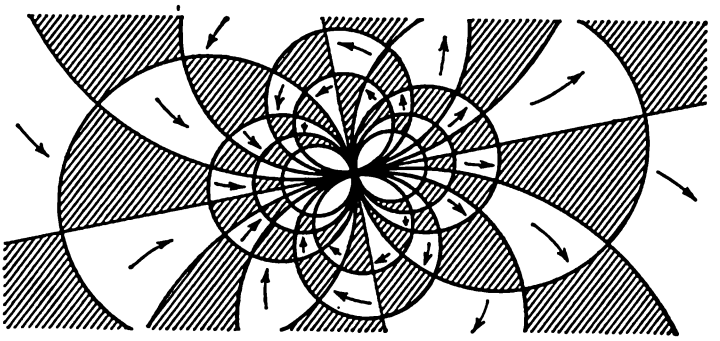
Soit $c = 0$ (cas d'une transformation linéaire). Les points fixes sont ∞ et $\frac{b}{d-a}$ (celui-ci est également ∞ pour $d = a$, i.e. pour une translation).

* * *

Une homographie possédant un seul point fixe est dite *parabolique*. La formule (20) entraîne que *la transformation* (1) *normée est parabolique si et seulement si le nombre* $a + d$ *est réel et* $= \pm 2$. □

Les transformations paraboliques avec point fixe ∞ sont des translations et ces transformations seulement.

Supposons que (1) a deux points fixes z_1 et z_2 et soient $\mathcal{K}$ la famille de circonférences passant par z_1, z_2 et $\mathcal{H}$ la famille de circonférences



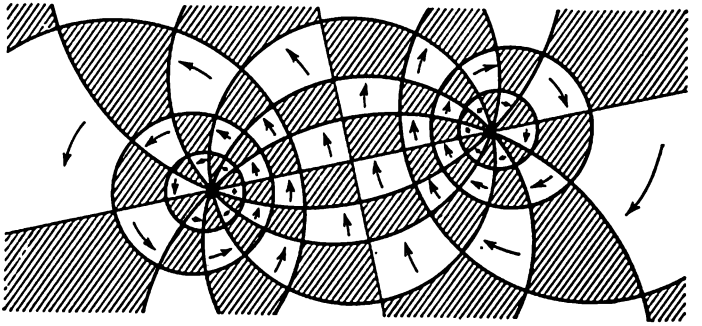
Transformation parabolique à point fixe fini. La transformation des zones hachurées s'effectue dans la direction des flèches

orthogonales à tous les éléments de $\mathcal{K}$. Le caractère circulaire des transformations homographiques entraîne de suite que (1) change toute circonférence de $\mathcal{K}$ en une circonférence de la même famille. Cette transformation conservant l'orthogonalité des circonférences remplace chaque élément de $\mathcal{H}$ par un élément de $\mathcal{H}$.

Il se peut que chaque circonférence de $\mathcal{H}$ devienne par (1) elle-même, i.e. tout point de la circonférence se transforme en son autre point (en général distinct du premier). On dit dans ce cas que la transformation homographique est *elliptique*. Dans la transforma-

tion elliptique chaque point se déplace suivant la circonférence $\in \mathcal{H}$ à laquelle il appartient.

Un exemple en est la rotation ayant 0 et ∞ pour points fixes.

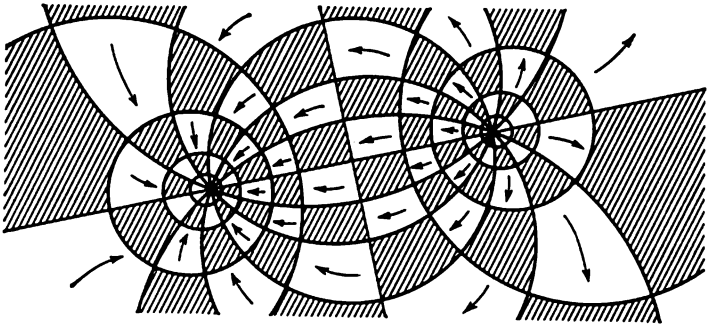


Transformation elliptique à points fixes finis

La famille $\mathcal{H}$ est formée de circonférences concentriques centrées en 0 et la famille $\mathcal{K}$ de droites passant par 0.

La transformation (1) est *hyperbolique* si elle change chaque circonférence de $\mathcal{K}$ en elle-même, ainsi que chaque arc que les points fixes déterminent sur les circonférences de la famille.

L'homothétie $w = az$, $a > 0$, avec points fixes 0 et ∞ en est



Transformation hyperbolique à points fixes finis

un exemple. Les familles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont ici les mêmes que dans le cas de la rotation $w = e^{i\alpha}z$.

Une transformation homographique à deux points fixes n'est en général pas ni hyperbolique ni elliptique, mais *loxodromique*. Tel est par exemple le produit d'une homographie hyperbolique et

d'une homographie elliptique à mêmes points fixes (par exemple le produit d'une homothétie et d'une rotation).

Proposition 2. *Pour deux triplets quelconques* (z_1, z_2, z_3) *et* (w_1, w_2, w_3) *de points distincts du plan* $\mathbb{C}^+$ *il existe une homographie* Φ *unique qui transforme le premier triplet en le second.*

Démonstration. L'unicité de Φ est évidente. En effet, s'il existe une autre transformation homographique Ψ qui change (z_1, z_2, z_3) en (w_1, w_2, w_3), alors la transformation $\Psi^{-1} \circ \Phi$ laisse invariants trois points z_1, z_2, z_3, ce qui ne peut avoir lieu, on le sait, pour une transformation homographique non identique.

Il suffit de démontrer l'existence pour le cas particulier $(w_1, w_2, w_3) = (0, \infty, 1)$ parce que $\Psi^{-1} \circ \Phi$ transforme (z_1, z_2, z_3) en (w_1, w_2, w_3) dès que Φ change (z_1, z_2, z_3) en $(0, \infty, 1)$ et (w_1, w_2, w_3) devient dans Ψ le triplet $(0, \infty, 1)$.

D'autre part, il est immédiat de trouver l'homographie $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (0, \infty, 1)$. Dans cette transformation le numérateur s'annule pour $z = z_1$, le dénominateur l'est pour $z = z_2$, et ils prennent des valeurs identiques pour $z = z_3$. Il est clair que c'est la transformation

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \tag{21}$$

qui remplit ces conditions. □

Remarque 1. Dans la formule (21), les points z_1, z_2, z_3 sont supposés finis (distincts de ∞). Quand $z_1 = \infty$, on pose

$$w = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2},$$

et, de même,

$$w = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \quad \text{pour} \quad z_2 = \infty,$$

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \text{pour} \quad z_3 = \infty.$$

Chacune de ces formules s'obtient de (21) en chassant deux facteurs en ∞.

Remarque 2. La démonstration ci-dessus permet d'écrire directement la relation entre z et w. Cette relation est évidemment de la forme

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{22}$$

Pour expliciter (1), on résout cette équation par rapport à w.

On conçoit que si l'un des z_1, z_2, z_3 ou w_1, w_2, w_3 est ∞, on modifie (22) en conformité avec la remarque 1.

La formule (22) s'interprète comme relation entre deux quadruplets (z_1, z_2, z_3, z) et (w_1, w_2, w_3, w) de points du plan $\mathbb{C}^+$, rela-

tion qui, quand elle est vérifiée, permet de transformer le premier en le second par une homographie (unique par la proposition 2). Pour unifier les notations, on désigne z par z_4, w et w_4, et on introduit le nombre

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\cdot\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2},$$

appelé le *birapport des points* z_1, z_2, z_3, z_4. On a la

Proposition 3. *Quatre points* z_1, z_2, z_3, z_4 *du plan* $\mathbb{C}^+$ *deviennent par une transformation homographique les points* w_1, w_2, w_3, w_4 *si et seulement s'il y a égalité de leurs birapports.* □

* * *

Fort de ces résultats, on écrit la formule générale de l'homographie Φ à points fixes z_1, z_2 donnés. En effet, soient z_3 un point quelconque distinct de z_1, z_2 et $w_3 = \Phi(z_3)$. On définit Φ comme étant une transformation homographique qui change (z_1, z_2, z_3) en (z_1, z_2, w_3), donc par la formule

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}\cdot\frac{w_3-z_2}{w_3-z_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

On pose

$$K=\frac{w_3-z_1}{w_3-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \tag{23}$$

il vient

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=K\,\frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{24}$$

C'est la formule générale pour l'homographie Φ à points fixes z_1, z_2 (distincts de ∞ ; si, disons, $z_2 = \infty$, on a $w - z_1 = K(z - z_1)$).

Le nombre K de la formule (24) s'appelle le *multiplicateur* de la transformation homographique Φ (à deux points fixes, i.e. Φ est non parabolique). Il peut être tout nombre complexe (non nul).

Pour interpréter la formule (24) on introduit l'homographie

$$\Omega : z \mapsto \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

et l'homographie

$$\mathrm{K} : z \mapsto Kz, \tag{25}$$

auquel cas (24) est équivalente à l'égalité

$$\Omega \circ \Phi = \mathrm{K} \circ \Omega,$$

i.e. à

$$\Phi = \Omega^{-1} \circ \mathrm{K} \circ \Omega$$

qui a l'interprétation suivante en termes de la théorie des groupes: Φ est *conjuguée* de K dans le groupe des homographies (dans la transformation Ω).

La transformation Ω envoie les points z_1, z_2 en 0 et ∞ respectivement, elle change les circonférences de $\mathscr{K}$ en droites passant par 0 et les circonférences de $\mathscr{H}$ en circonférences concentriques de centre 0. La transformation K fait les points se déplacer suivant ces droites et échange les circonférences (cas $K > 0$) ou fait chaque point se déplacer suivant les circonférences tout en échangeant les droites (cas $|K| = 1$). Les droites se transforment par Ω^{-1} en des circonférences de $\mathscr{K}$ et les circonférences concentriques en des circonférences de $\mathscr{H}$. Si $K > 0$, la transformation Φ fait donc les points du plan se déplacer suivant les circonférences de $\mathscr{K}$ et échange celles de la famille $\mathscr{H}$ (c'est donc une transformation hyperbolique), tandis qu'elle est elliptique pour $|K| = 1$ (elle fait les points du plan se déplacer suivant les circonférences de $\mathscr{H}$ et échange celles de la famille $\mathscr{K}$). Pour K non réel et $|K| \neq 1$, Φ est loxodromique.

On dira en abrégé que *quelles que soient les homographies* Ω *et* K, *la transformation* $\Omega^{-1} \circ \mathrm{K} \circ \Omega$ *est en fait du type* K. On se rappelle de plus que la transformation (25) est hyperbolique ou elliptique selon que $K > 0$ ou $|K| = 1$ et qu'elle est loxodromique pour tous les K restants.

Il nous reste à calculer directement le multiplicateur K moyennant la formule (1) (supposée normée) de l'homographie Φ. On utilise la formule (23) dans le cas où $z_3 = \infty$, donc $w_3 = a/c$ (il est clair que le premier membre est indépendant de z_3). Selon (23),

$$K = \frac{a - cz_1}{a - cz_2},$$

z_1, z_2 étant les racines (20) de l'équation du deuxième degré (19). D'après les formules de Viète,

$$z_1 + z_2 = -\frac{d-a}{c}, \quad z_1 z_2 = -\frac{b}{c},$$

donc

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = \frac{(d-a)^2 + 2bc}{c^2},$$

si bien que

$$K + \frac{1}{K} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} + \frac{a - cz_2}{a - cz_1} = \frac{(a - cz_1)^2 + (a - cz_2)^2}{(a - cz_1)(a - cz_2)} =$$

$$= \frac{2a^2 - 2ac(z_1 + z_2) + c^2(z_1^2 + z_2^2)}{a^2 - ac(z_1 + z_2) + c^2 z_1 z_2} = \frac{2a^2 + 2a(d-a) + (d-a)^2 + 2bc}{a^2 + a(d-a) - bc} =$$

$$= \frac{(a+d)^2 - 2(ad - bc)}{ad - bc} = (a+d)^2 - 2.$$

Ainsi, *le multiplicateur K est racine de l'équation du deuxième degré*

$$K + \frac{1}{K} = (a+d)^2 - 2. \quad \square \tag{26}$$

(On observe que K d'une homographie à deux points fixes dépend de la numérotation des points et qu'il devient K^{-1} par un réarrangement. Aussi l'équation (26) admet deux racines, à savoir K et K^{-1}.)

* * *

L'équation (26) entraîne de suite (il suffit d'écrire ses racines sous forme explicite) que K est réel positif (et, partant, (1) est une transformation hyperbolique) si et seulement si $a + d$ est réel et $|a + d| > 2$. De même, $|K| = 1$ (et, partant, (1) est une transformation elliptique) si et seulement si $a + d$ est réel et $|a + d| < 2$. Aussi la condition « $a + d$ est non réel » est nécessaire et suffisante pour que (1) soit une homographie loxodromique (on rappelle qu'avec $|a + d| = 2$, on n'est plus dans la classe d'homographies à deux points fixes du moment que les transformations correspondantes sont paraboliques, i.e. elles possèdent un point fixe unique).

Ainsi, on énonce finalement le

Théorème 5 (classification des transformations homographiques). *La transformation homographique normée*

$$w = \frac{az+d}{cz+d}$$

n'est pas loxodromique si et seulement si le nombre $a + d$ est réel. Sous cette hypothèse, une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit hyperbolique, parabolique ou elliptique est respectivement $|a+d| > 2$, $|a + d| = 2$, $|a + d| < 2$. □

* * *

Avant de passer à un autre sujet, nous voulons décrire une classe intéressante de transformations homographiques. On cherche au préalable les formules explicites pour la projection stéréographique d'une sphère S sur le plan $\mathbb{C}^+$.

Soit S la *sphère unité* définie en coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ par l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

(les notations usuelles x, y, z sont à rejeter car le symbole z désigne les nombres complexes). On prend pour plan de projection identifié avec le plan $\mathbb{C}^+$ des nombres complexes $z = x + iy$ le plan équatorial $\zeta = 0$ de S (ce qui équivaut à adjoindre une homothétie de rapport 1/2). Le pôle N de la projection stéréographique se confond avec le point (0, 0, 1). La droite NM passant par N et par un point arbitraire M (ξ, η, ζ) de S a pour équations canoniques

$$\frac{X}{\xi} = \frac{Y}{\eta} = \frac{Z-1}{\zeta-1} \tag{27}$$

(les coordonnées courantes des points de la droite sont désignées par X, Y, Z). Elle coupe donc le plan de projection en $\left(\frac{-\xi}{\zeta-1}, \frac{-\eta}{\zeta-1}, 0\right)$, ce qui veut dire que la projection stéréographique transforme le point M (ξ, η, ζ) en le point

$$z=\frac{\xi}{1-\zeta}+i\,\frac{\eta}{1-\zeta}=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \tag{28}$$

du plan $\mathbb{C}^+$ (on pose naturellement $z = \infty$ pour $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$).

Soient M^* ($-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$) le point diamétralement opposé à M (ξ, η, ζ) et z^* le point correspondant de $\mathbb{C}^+$. On a

$$z^* = -\frac{\xi+i\eta}{1+\zeta}, \tag{29}$$

donc

$$z^*\bar{z} = -\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\zeta^2} = -1.$$

Inversement, soit $z^*\bar{z} = -1$ et z défini par (28). Alors z^* vérifie la relation (29). Ainsi, *les points z et z^* du plan $\mathbb{C}^+$ sont les images des points antipodes de la sphère dans la projection stéréographique si et seulement si*

$$z^* = -\frac{1}{\bar{z}}. \quad \square \tag{30}$$

* * *

Soit Σ une rotation quelconque de la sphère S. La projection stéréographique $\Pi : S \to \mathbb{C}^+$ donne l'homographie $\Phi = \Pi \circ \Sigma \circ \Pi^{-1}$ du plan $\mathbb{C}^+$ dont nous dirons qu'elle *représente* Σ *dans* $\mathbb{C}^+$. Comme la rotation Σ est une transformation de points diamétralement opposés à points diamétralement opposés, l'homographie Φ change des points reliés par (30) en des points reliés par (30). Autrement dit, étant donnée Φ définie par la formule (normée) (1), deux points z et z^* quelconques tels que $z^*\bar{z} = -1$ vérifient la relation

$$\left(\frac{az^*+b}{cz^*+d}\right)\left(\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\right) = -1,$$

i.e. on a identiquement en z

$$\left(\frac{a-b\bar{z}}{c-d\bar{z}}\right)\left(\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\right) = -1,$$

égalité équivalente à

$$(a-b\bar{z})(\bar{a}\bar{z}+\bar{b})+(c-d\bar{z})(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) = 0.$$

La chose n'est possible que si tous les coefficients sont nuls, i.e. si

$$a\bar{b}+c\bar{d}=0, \quad a\bar{a}-b\bar{b}+c\bar{c}-d\bar{d}=0, \quad b\bar{a}+d\bar{c}=0.$$

La première (et la troisième) relation signifie qu'il existe $\lambda \neq 0$ pour lequel $d = \lambda\bar{a}$ et $b = -\lambda\bar{c}$. La deuxième relation prend donc la forme $(1 - \lambda\bar{\lambda})\ (a\bar{a} + c\bar{c}) = 0$. Vu que $a\bar{a} + c\bar{c} > 0$, cette égalité n'a lieu que si $1 - \lambda\bar{\lambda} = 0$, i.e. si $|\lambda| = 1$.

D'autre part, la condition de normalisation $ad - bc = 1$ est maintenant équivalente à $\lambda\ (a\bar{a} + c\bar{c}) = 1$, d'où il vient, en particulier, le caractère réel et positif de λ. Aussi $\lambda = 1$, donc $d = \bar{a}$, $b = -\bar{c}$. Ainsi, *la transformation homographique du plan* $\mathbb{C}^+$, *qui représente la rotation de la sphère, est définie par la formule*

$$(31) \qquad w=\frac{az-\bar{c}}{cz+\bar{a}}, \quad \text{où} \quad a\bar{a}+c\bar{c}=1. \quad \square$$

Ici $a + d = 2 \operatorname{Re} a$ est réel. Si $c \neq 0$, alors $|a|^2 = a\bar{a} = 1 - c\bar{c} < 1$, donc $|\operatorname{Re} a| \leqslant |a| < 1$, et si $\operatorname{Im} a \neq 0$, alors $|\operatorname{Re} a| < |a| \leqslant 1$, si bien qu'on a dans les deux cas $|\operatorname{Re} a| < 1$, donc $|a + d| < 2$. Du moment que (31) est l'identité pour $c = 0$ et $\operatorname{Im} a = 0$, on vient d'établir l'*ellipticité de toute transformation* (31) *non identique*. $\square$

Le multiplicateur K est donc de la forme $e^{i\theta}$. On montre (le soin en est laissé au lecteur) que l'angle θ se confond avec l'angle dont on a fait tourner la sphère au départ.

Remarque. La façon dont on a établi la formule (31) pèche par un défaut majeur: on a implicitement supposé (sans le démontrer) que la transformation $\Phi = \Pi \circ \Sigma \circ \Pi^{-1}$ de $\mathbb{C}^+$, représentation de la rotation Σ, est une homographie. La démonstration est suffisamment laborieuse pour que nous nous bornions à en donner les grandes lignes.

On vérifie de suite que la projection stéréographique Π projette chaque circonférence de la sphère en une circonférence (ou une droite) du plan. Puisque la rotation Σ change évidemment les circonférences en circonférences, il en découle le caractère circulaire de Φ. On se propose donc de démontrer que toute transformation (bijective) Φ du plan $\mathbb{C}^+$ sur lui-même présentant le caractère circulaire est une homographie. (Nous disons d'avance que cette affirmation est fausse, donc impossible à démontrer.)

Supposons que le point ∞ devient par Φ le point z_0 et considérons une homographie Ω quelconque qui réalise la transformation inverse. Dans ce cas, $\Psi = \Omega \circ \Phi$ conservant le caractère circulaire laisse invariant le point ∞. Il suffit donc de se borner à $\Psi: \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ à point fixe ∞ qui jouit de la propriété indiquée. Puisque $\Psi(\infty) = \infty$, on l'interprète comme transformation du plan $\mathbb{C}$ (sans le

point ∞). D'autre part, les droites du plan $\mathbb{C}^+$ sont exactement les circonférences passant par ∞, si bien qu'elles deviennent par Ψ des droites. Ainsi, il existe dans le plan non fermé une transformation de droites à droites. On sait (voir remarque 1 de la leçon 27) que c'est nécessairement une transformation affine. Dans le plan sans point ∞ la transformation Ψ est donc une transformation affine ayant le caractère circulaire. On conçoit qu'elle est nécessairement orthogonale, i.e. c'est ou un déplacement (cas I) ou un déplacement suivi d'une symétrie (cas II). Le cas I est évident du moment que tout déplacement constitue, on l'a démontré, une transformation homographique (voire linéaire). Le cas II révèle au contraire la fausseté de l'affirmation énoncée car la symétrie $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas une homographie.

Pour venir à bout de cette difficulté, il faut savoir discerner les homographies d'avec les transformations du type symétrie. Le fait est qu'on définit bien, dans la classe de transformations à caractère circulaire, la sous-classe de transformations conservant l'orientation (on ne l'a fait jusqu'à présent que pour les transformations affines), de sorte qu'en se limitant à cette sous-classe on exclut automatiquement le cas II.

Ainsi, *toute transformation du plan $\mathbb{C}^+$ qui présente le caractère circulaire et conserve l'orientation est une homographie.* □

La formule (31) se trouve complètement démontrée si l'on établit la propriété, pour $\Phi = \Pi \circ \Sigma \circ \Pi^{-1}$, de conserver l'orientation. Or, on le vérifie automatiquement.

* * *

Toute rotation de la sphère laisse invariants les points d'intersection de l'axe de rotation et de la sphère. Nous les appellerons les *pôles de la rotation.*

Ce sont des points diamétralement opposés de la sphère, si bien que leurs images par la projection stéréographique sont reliées par (30). Comme ces images sont les points fixes de l'homographie qui représente la rotation donnée, les transformations homographiques représentant les rotations de la sphère sont caractérisées de façon unique comme transformations elliptiques à points fixes z_1, $-\bar{z}_1^{-1}$. Les formules correspondantes s'écrivent

$$\frac{w-z_1}{w+\bar{z}_1^{-1}} = K\,\frac{z-z_1}{z+\bar{z}_1^{-1}},$$

où $K = e^{i\theta}$, i.e. on a

$$\frac{w-z_1}{w\bar{z}_1+1} = K\,\frac{z-z_1}{z\bar{z}_1+1}.$$

La résolution en w fournit

$$(32) \qquad w = \frac{(K + z_1\bar{z}_1)\, z + (1 - K)\, z_1}{(1 - K)\, \bar{z}_1 \cdot z + (1 + K z_1 \bar{z}_1)}, \quad K = e^{i\theta}.$$

Comme la formule (31), cette formule donne les homographies générales du plan fermé qui représentent les rotations de la sphère. L'argument θ de K est l'angle de la rotation associée et le nombre z_1 l'image de l'un des pôles. Avec le pôle diamétralement opposé, l'angle θ change de signe.

La formule (32) n'est pas normée. Puisque

$$(K + z_1\bar{z}_1)\,(1 + K z_1 z_1) - (1 - K)^2 z_1 \bar{z}_1 =$$
$$= (1 + z_1\bar{z}_1)^2 K = (1 + z_1\bar{z}_1)^2 e^{i\theta},$$

on obtient l'écriture normée en multipliant tous les coefficients de (32) par $\lambda = (1 + z_1\bar{z}_1)^{-1} e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

On déduit donc (31) de (32) en posant

$$a = \lambda\,(K + z_1\bar{z}_1), \qquad c = \lambda\,(1 - K)\,\bar{z}_1.$$

Dans la pratique, la formule (32) s'avère plus commode.

Soit, par exemple, une rotation autour de l'axe des abscisses. Ses pôles sont les points $(\pm 1, 0, 0)$ qui se projettent en ± 1 du plan fermé. On utilise donc la formule (32) en posant $z_1 = 1$. Par conséquent, l'homographie qui représente la rotation θ de la sphère autour de l'axe des abscisses est donnée par

$$w = \frac{(1 + K)\, z + (1 - K)}{(1 - K)\, z + (1 + K)}, \quad K = e^{i\theta}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\frac{1}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}}$, on pose $\alpha = \frac{\theta}{2}$ et on utilise les formules d'Euler

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

il vient la formule normée

$$w = \frac{\cos\alpha \cdot z - i \sin\alpha}{-i \sin\alpha \cdot z + \cos\alpha}$$

de cette homographie. Si $\alpha = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$, i.e. $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$, les transformations s'écrivent

$$(33) \qquad w = \frac{z - i}{-iz + 1}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z + i}{iz + 1}$$

respectivement.

Si la rotation s'effectue autour de l'axe des ordonnées, on pose dans (32) $z_1 = i$ (ou $z_1 = -i$), et l'homographie correspondante est définie par

$$w = \frac{(1+K)\,z+(1-K)\,i}{-(1-K)\,iz+(1+K)}, \qquad K = e^{i\theta},$$

donc par

$$w = \frac{\cos\alpha\cdot z+\sin\alpha}{-\sin\alpha\cdot z+\cos\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \pi,$$

$\left(\text{formule obtenue en multipliant par } \frac{1}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$, où $\alpha=\theta/2$. Si $\alpha = \pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, i.e. $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$, les transformations sont

(34) $$w = \frac{z+1}{z-1}, \quad -\frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z+1}.$$

Dans la rotation autour de l'axe des cotes, l'homographie associée a les points fixes 0 et ∞. C'est donc la rotation

$$w = e^{i\theta}z$$

du plan fermé. Aux valeurs $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ il correspond les transformations

(35) $$w = iz, \quad -z, \quad -iz.$$

Prenons pour axe de rotation la bissectrice du premier octant qui coupe la sphère au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. On a $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-1}$. Si K est quelconque, la formule (32) donne lieu à une expression lourde et peu élégante. Dans le cas $\theta = 2\pi/3$ $\left(\text{i.e. } K = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, on simplifie par $\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2}$ et on obtient $W = \frac{z+1}{-iz+i} = i\,\frac{z+1}{z-1}$; dans le cas $\theta = 4\pi/3$ $\left(\text{i.e. } K = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, on a, après avoir simplifié par $\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}$, la formule $w = \frac{z+i}{z-i}$. Ainsi,

(36) $$w = i\,\frac{z+1}{z-1}, \quad \frac{z+i}{z-i}.$$

On traite de même le cas où l'axe de rotation coupe la sphère au point $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. On a $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{3}-1}$, et les transformations sont définies pour $K = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ par

(37) $$w = -\frac{z+i}{z-i}, \quad i\,\frac{z-1}{z+1}.$$

Lorsque les points d'intersection sont $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, on a pour le même K

$$w = \frac{z-i}{z+i}, \quad -i\frac{z+1}{z-1} \tag{38}$$

et

$$w = -\frac{z-i}{z+i}, \quad -i\frac{z-1}{z+1} \tag{39}$$

respectivement.

Soit maintenant une rotation autour de la bissectrice du premier quadrant du plan $\xi = 0$, qui coupe la sphère en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, auquel cas $z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}-1}$. La transformation se définit pour $\theta = \pi$, i.e. pour $K = -1$, par la formule

$$w = i\frac{z+i}{z-i}. \tag{40}$$

De même, la rotation d'angle π autour de la bissectrice du deuxième quadrant du plan $\xi = 0$, qui coupe la sphère en $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, est représentée par la transformation

$$w = -i\frac{z-i}{z+i}, \tag{41}$$

et les rotations d'angle π autour des bissectrices des quadrants des plans $\eta = 0$ et $\zeta = 0$ par

$$w = \frac{z+1}{z-1}, \quad -\frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{i}{z}, \quad -\frac{i}{z}. \tag{42}$$

Les rotations représentées par les homographies (33) à (42) sont caractérisées par la *propriété de superposer à lui-même* le cube inscrit dans la sphère, dont les sommets sont les points $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Les transformations (33), (34), (35) correspondent aux rotations $\pi/2$, π et $3\pi/2$ du cube autour de chacun des trois axes joignant les centres de ses faces opposées, les transformations (36), (37), (38), (39) aux rotations $2\pi/3$ et $4\pi/3$ autour de chacun des quatre axes joignant ses sommets diamétralement opposés et les transformations (40), (41), (42) aux rotations π autour de chacun de 6 axes joignant les milieux de ses arêtes diamétralement opposées. On y ajoute la coïncidence qui laisse invariants tous les points du cube. Il y a donc $24 = 3 \times 3 + 4 \times 2 + 6 + 1$ rotations qui font coïncider

le cube avec lui-même. On démontre facilement (faites-le !) que ce sont les seules qui possèdent cette propriété.

Les transformations (35) plus l'identité sont réunies en une seule formule, à savoir

$$w = i^k z, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{43}$$

On procède de même pour la deuxième transformation (33), la troisième et la quatrième transformation (42) et la deuxième transformation (34) :

$$w = \frac{i^k}{z}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{44}$$

De même, la formule

$$w = i^k \frac{z+1}{z-1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{45}$$

définit les premières homographies (42), (36), (34) et la deuxième transformation (38) ; la formule

$$w = i^k \frac{z-1}{z+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{46}$$

donne la troisième homographie (34) et les deuxièmes transformations (37), (42), (39). La formule

$$w = i^k \frac{z+i}{z-i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{47}$$

définit (40), la deuxième transformation (36), la première transformation (37) et la troisième transformation (33) ; les premières homographies (38), (33), (39) et l'homographie (41) sont données par la formule

$$w = i^k \frac{z-i}{z+i}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{48}$$

Le résumé de ces résultats s'énonce sous forme de

Proposition 4. *Il y a exactement* 24 *rotations qui ramènent un cube sur lui-même. Leurs représentations dans le plan* $\mathbb{C}^+$ *sont les transformations homographiques* (43) *à* (48). □

On procède de même pour les autres polyèdres réguliers. Un tétraèdre est ramené sur lui-même par 12 rotations représentées par (43), (44), (47), (48) (pour $k = 0, 2$) et par (45), (46) (pour $k = 1, 3$). Le groupe des rotations de l'octaèdre coïncide avec celui du cube, et les rotations superposant un icosaèdre (ou, ce qui revient au même, un dodécaèdre) à lui-même sont au nombre de 60. Les transformations homographiques correspondantes sont

$$w = \zeta^k z, \quad \frac{-\zeta^k}{z}, \quad \zeta^k \frac{(1+\zeta)\zeta^l \cdot z + 1}{\zeta^{l+1} \cdot z - (1+\zeta)}, \quad -\zeta^k \frac{\zeta^l z - (1+\zeta)}{(1+\zeta)\zeta^{l-1} \cdot z + 1},$$

avec $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$.

INDEX

Aire d'un bivecteur 125
Angle de deux plans 134
Angle de rotation 245
Anticommutativité de la multiplication extérieure 63
Associativité de l'addition des vecteurs 16
Asymptote 166

Base(s)
  canonique 38
  déformable en une base 93
  équivalentes 95
  d'un espace vectoriel 34
  de même sens 86
  orthonormée 116
  réelles 156
  de sens contraires 86
Birapport de quatre points 267
Bivecteur 54, 55

Centre d'une courbe 161
Centre de symétrie 161
Circonférence 186
Coefficients de Fourier 114
Combinaison linéaire de vecteurs 26
  triviale 26
Complété projectif du plan affine 213
Cône 196
  directrice 196
  du second degré 196
  sommet 196
Coniques 198
Coordonnées
  affines 42
  polaires 148
  projectives 222
  d'un vecteur 36
Côté d'une droite 88
Courbe algébrique
  de degré n 151
  réelle 158
Courbe du second degré
  à centre 162
  du genre ellipse 167
  — hyperbole 167
  — parabole 167
Cylindre 203
  axe 203
  elliptique 203
  — imaginaire 204
  hyperbolique 205
  parabolique 206

Décomposition d'un vecteur dans une base 36
Déformation des bases 93
Demi-espaces définis par un plan 74
Demi-plans définis par une droite 52
Déplacements de l'espace euclidien 233
Diamètres conjugués 171
Dimension d'un espace vectoriel 35
Direction
  asymptotique 165
  de corde 170
  non asymptotique 165
  non singulière 168
  principale 182
  singulière 168
Distance
  de deux points 107
  d'un point à une droite 130
  — à un plan 133
Droite
  dans l'espace 43
  parallèle à un plan 77

Egalité de Parseval 116
Ellipse 140
  affine 150
  axes (grand et petit) 141
  centre 141
  demi grand axe 141
  demi petit axe 141

Ellipse
directrices 141
distance focale 141
excentricité 141
foyers 141
de gorge 191
propriété focale 142
rayons focaux 142
sommets 141
Ellipsoïde 187
imaginaire 189
Ensemble lié de vecteurs 27
Equation canonique d'une droite 48
Equation paramétrique vectorielle
d'une droite 46
d'un plan 70
Equations affines canoniques des courbes de degré 2 153
Espace ponctuel euclidien 106
Espace projectif 228
Espace(s) affine(s) 40
complété 227
isomorphes 41
orienté 86
réel-complexe 157
Espace(s) vectoriel(s) 19
associé à un espace affine 40
de dimension finie 34
euclidien 106
isomorphes 37
orienté 86
réel-complexe 155
réels-complexes isomorphes 156

Faisceau
de droites 210
impropre 212
de plans 229
propre 212
Famille(s) de vecteurs
génératrice 34
linéairement équivalentes 98
orthonormée 114
Forme
bilinéaire 112
— symétrique 112
métrique d'une base 113
quadratique 112
— définie positive 112

Géométrie
affine 40
du complété projectif du plan affine 213
euclidienne 106
Gerbe de plans 231

Groupe
des automorphismes d'espaces affines 225
linéaire général 224
des transformations homographiques 257
— projectives 258

Hyperbole 143
affine 150
asymptotes 143
axes (réel et imaginaire) 144
branches 144
centre 144
demi-axe 144
directrices 145
distance focale 144
excentricité linéaire 144
foyers 145
paramètre 144
sommets 144
Hyperboloïde
à deux nappes 189
à une nappe 191

Inégalité
de Bessel 114
de Cauchy-Bouniakovski 107
du triangle 108
Inversion 260
Isomorphisme
de coordonnées 38
défini par égalité des coordonnées 39
d'espaces affines 41
d'espaces vectoriels 37
— — euclidiens 118

Longueur d'un vecteur 106

Matrice(s)
équivalentes 95
orthogonale 119
— unimodulaire 120
de passage 81
Modèle d'une géométrie 214
Multiplicateur d'une transformation homographique 267
Multiplication scalaire définie sur un espace vectoriel 106

Orientation(s)
d'un demi-espace 91
d'un demi-plan 89
d'un espace vectoriel 86
Ovale 178

Parabole 138
  affine 150
  axe 139
  directrice 140
  distance focale 140
  foyer 140
  paramètre 140
  sommet 139
Paraboloïde
  elliptique 198
  hyperbolique 199
Partie d'un espace vectoriel
  libre 27
  liée 27
Plan
  complété 213
  défini par un point et un bivecteur 69
  projectif 220
Points
  fixes d'une transformation homographique 263
  du même côté d'une droite dans le plan 51
    — d'un plan dans l'espace 73
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 117
Produit
  d'un bivecteur par un nombre 61
  extérieur des bivecteurs par un vecteur 100
  d'un trivecteur par un nombre 100
  vectoriel 127
Projection stéréographique 256
Propriétés algébriques de la multiplication extérieure 62-63

Rayon vecteur d'un point 41
Repère(s) affine(s) 42
  de même sens 86
  de sens contraires 86
Rotation 241
  pôles 272

Somme
  de deux bivecteurs 59
  de deux trivecteurs 103
Sous-espace réel 155
Sphère 256
Symétrie
  par rapport au centre O 161
  — à une circonférence 259
  — à une droite 260
Système de coordonnées rectangulaires 116

Tangente 165
Théorème(s)
  de configuration 250
  de Desargues 246
  de Fano 250
  de Pappus-Brianchon 252
  de Pappus-Pascal 248
Transformations
  affines 234
  homographiques 257
  — elliptiques 264
  — hyperboliques 265
  — loxodromiques 265
  — paraboliques 264
  linéaires du plan des nombres complexes 258
  orthogonales 234
  projectives 234
Translation 240

Vecteur(s) 15, 19
  colinéaires 31
  complétant un bivecteur 145
  coplanaires 31
  parallèle à un bivecteur 58
  proportionnels 31
  unitaire 117
Volume d'un trivecteur 123
Volume orienté d'un parallélépipède 103